УДК 539.3

С.М. Балабаев, Н.Ф. Ивина
Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет,
690087, г. Владивосток, ул. Луговая, 52б

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ АНАЛИЗА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФОРМ И РАЗМЕРОВ

На основе вариационного принципа Лагранжа получено матричное уравнение метода конечных элементов для анализа собственных колебаний ограниченных упругих тел произвольной формы и размеров. Рассмотрена структура элементных матриц жесткости и массы, которые в общем случае выражаются тройными интегралами по объему конечного элемента. Обсуждена обобщенная матричная задача на собственные значения и указан метод ее решения.

Ключевые слова: *метод конечных элементов, функция Лагранжа, собственные колебания.*

S.M. Balabaev, N.F.Ivina

VARIATION FORMULATION OF FINITE ELEMENT METHOD FOR THE ANALYSIS OF NATURAL VIBRATIONS ELASTIC BODIES OF ARBITRARY SHAPES AND SIZES

On the basis of the Lagrange variational principle, the matrix equation of the finite element method for the analysis of natural oscillations of bounded elastic bodies of arbitrary shape and size is obtained. The structure of element stiffness and mass matrices, which are generally expressed by triple integrals in terms of the finite element volume, is considered. The generalized eigenvalue matrix problem is discussed and the method of its solution is indicated.

Key words*: finite element method, Lagrange function, natural vibrations.*

Введение

Задача анализа собственных колебаний упругих тел произвольных форм и размеров представляет собой типичную краевую задачу математической физики. Для решения подобных задач используются два основных метода: дифференциальный и вариационный. В первом случае применяются дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие поведение бесконечно малой области, и краевые условия, налагаемые на искомые функции двух и более переменных и их частные производные. К настоящему времени точные аналитические решения многих краевых задач в дифференциальной постановке получены только для простейших идеализированных случаев. Причем простые аналитические выражения для искомых функций получаются достаточно редко. Обычно же решения сводятся к бесконечным системам уравнений, рядам по специальным функциям (которые также являются бесконечными рядами) и т.п. Поэтому анализ полученных решений представляет определенные трудности и требует разработки специализированных вычислительных программ. Усложнение краевых задач (например, учет анизотропии тела или элементов конструкции) и попытки их решения для областей сложной формы вызывают значительные и обычно непреодолимые трудности.

Объекты и методы исследований

Другой метод постулирует вариационный принцип, справедливый для некоторой конечной области. Вариационные принципы позволяют определить функционал задачи, решение которой сводится к отысканию функции, минимизирующей полученный функционал. Вариационный метод позволяет получить приближенное аппроксимирующее решение на основе базисных (пробных) функций. Базисные функции зависят от геометрической формы области, в которой ищется решение, и выбираются одинаковыми для всей этой области. Если область, для которой ищется решение, имеет сложную форму или параметры материала изменяются внутри области, то классические вариационные методы неприменимы и решения подобных задач можно получить только методом конечных элементов (МКЭ).

МКЭ, являющийся вариационно-разностным методом, позволяет получить приближенное аппроксимирующее решение на основе кусочно-определенных базисных функций, называемых функциями формы. МКЭ сводится к аппроксимации сплошной среды совокупностью подобластей, называемых конечными элементами. Применение МКЭ предполагает выполнение следующих основных этапов:

1. Разбиение конечной области на конечные элементы, которые связаны друг с другом в узловых точках (узлах).
2. Аппроксимация искомых функций на каждом конечном элементе многочленами невысокого порядка (обычно второго), которые однозначно определяются значениями функции в узловых точках конечного элемента.
3. Формирование системы линейных алгебраических уравнений относительно искомых узловых значений функции (обычно на основе подходящего вариационного принципа) для каждого конечного элемента.
4. Формирование глобальной системы уравнений для всего конечного тела; учет граничных условий и условий симметрии, если она есть.
5. Решение полученной глобальной системы линейных уравнений или глобальной матричной задачи на собственные значения (при изучении собственных колебаний тела).

МКЭ удобен в инженерных приложениях тем, что свойства отдельных конечных элементов могут быть различны. Большим достоинством МКЭ является его универсальность, позволяющая разработать достаточно эффективные пакеты программ. Характерной особенностью этих программ является то, что многие подпрограммы не зависят от геометрической формы тела, поскольку они выполняют одни и те же математические операции, например, численное интегрирование, формирование глобальных матриц массы и жесткости, учет условий симметрии, различные операции с матрицами и т.п. Поэтому при разработке программы для анализа новой конструкции нужно изменять только основную программу и небольшое количество необходимых подпрограмм.

Результаты и их обсуждение

Матричное уравнение, описывающее собственные колебания конечного упругого тела, известно и приведено без вывода в окончательном виде в монографии [1], остающейся и до настоящего времени фактически маленькой энциклопедией МКЭ. Рассмотрим вывод этого уравнения на основе вариационного принципа Лагранжа. Вывод уравнения полезен также тем, что он поясняет появление и структуру элементных матриц массы, жесткости и упругих сил.

В задачах о колебаниях упругих тел произвольной формы и размеров вариационный принцип Лагранжа использует интегральные энергетические соотношения, которые определяют функцию Лагранжа (лагранжиан). Вариационный принцип предполагает, что лагранжиан L должен принимать стационарное значение

$$\delta L = 0, \;\; L = U - W, \tag{1}$$

где U – энергия упругой деформации; W – кинетическая энергия.

Рассмотрим основные соотношения МКЭ при отсутствии начальных деформаций и остаточных напряжений. Пусть конечное упругое тело объемом V ограничено поверхностью S, на части S_1 которой могут быть приложены поверхностные силы, остальная часть поверхности свободна от механических напряжений. При гармонической временной зависимости $(\exp(i\omega t))$ лагранжиан равен

$$L = U - W = 0,5\iiint\limits_V \left(\{s\}^T\{\sigma\} - \omega^2\rho\{u\}^T\{u\}\right)dV - \iint\limits_{S_1}\{u\}^T\{f\}\,dS, \tag{2}$$

где $\{s\}$ – вектор из компонент деформаций; символ T означает транспонирование; $\{\sigma\}$ – вектор-компонент упругих напряжений; ω – круговая частота; ρ – плотность тела; $\{u\}$ – вектор-компонент смещения; $\{f\}$ – вектор плотности узловых сил.

Запишем закон Гука без учета начальных деформаций и остаточных напряжений

$$\{\sigma\} = [c]\{s\}, \tag{3}$$

где $[c]$ – матрица упругих постоянных, ее вид зависит от симметрии материала, а размерность – от вида деформации. Например, для пьезокерамики (симметрия ∞mm) в общем трехмерном случае эта матрица определяется так:

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{11}-c_{12})/2 \end{bmatrix}.$$

Матрица упругих постоянных является симметричной, что является следствием инвариантности энергии относительно пути достижения заданного деформированного состояния. В осесимметричном случае эта матрица содержит четыре первые строки из столбца.

Введем конечно-элементную аппроксимацию смещения

$$\{u\} = [N_u]\{u_i\}, \tag{4}$$

где $\left[N_u\right]$ – интерполяционная матрица для смещений, зависящая от типа конечного элемента; $\left\{u_i\right\}$ – вектор узловых смещений. Если известны смещения во всех точках конечного элемента, то можно определить и деформации

$$\left\{s\right\}=\left[L_S\right]\left\{u\right\}, \tag{5}$$

где $\left[L_S\right]$ – матричный дифференциальный оператор, который зависит от типа деформации и выражается по известным соотношениям линейной теории упругости.

Подставив в (5) выражение (4), получим

$$\left\{s\right\}=\left[L_S\right]\left[N_u\right]\left\{u_i\right\}=\left[B_S\right]\left\{u_i\right\}, \tag{6}$$

где $\left[B_S\right]$ – интерполяционная матрица для деформаций.

Рассмотрим конечно-элементную аппроксимацию лагранжиана. Выражения (4) и (6) определяют аппроксимации смещения и деформации в пределах одного конечного элемента. Для всего конечного упругого тела можно записать

$$\left\{u\right\}=\sum_e\left[N_u\right]\left\{u_i\right\},\quad \left\{s\right\}=\sum_e\left[B_S\right]\left\{u_i\right\}. \tag{7}$$

Суммирование в выражениях (7) предполагается по всем конечным элементам, что обеспечивается специальным выбором функций формы, которые равны нулю вне заданного конечного элемента. Функцию Лагранжа (2) запишем с учетом выражения (3) как сумму вкладов всех конечных элементов объема V и поверхности S_1

$$L=0,5\sum_e\iiint_{V_e}\left(\left\{s\right\}^T\left[c\right]\left\{s\right\}-\omega^2\rho\left\{u\right\}^T\left\{u\right\}\right)dV-\sum_{e_1}\iint_{S_e}\left\{u\right\}^T\left\{f\right\}dS. \tag{8}$$

Перепишем выражение (8), учитывая конечно-элементные аппроксимации (4) и (6):

$$L=0,5\sum_e\iiint_{V_e}\left(\left\{u_i\right\}^T\left[B_S\right]^T\left[c\right]\left[B_S\right]\left\{u_i\right\}-\omega^2\rho\left\{u_i\right\}^T\left[N_u\right]^T\left[N_u\right]\left\{u_i\right\}\right)dV-\sum_{e_1}\iint_{S_e}\left\{u_i\right\}^T\left[N_u\right]^T\left\{f\right\}dS. \tag{9}$$

Выражение (9) представляет собой конечно-элементную аппроксимацию функции Лагранжа. Стационарное значение лагранжиана определяется условием (1), которое достигается при $\partial L/\partial\left\{u_i\right\}=0.$ Воспользуемся правилами дифференцирования матричных произведений [2]:

$$\begin{aligned}\left[Z\right]&=\left\{A\right\}^T\left\{Y\right\}, & \partial Z/\partial\left\{Y\right\}&=\left\{A\right\},\\ \left[Z\right]&=\left\{Y\right\}^T\left\{A\right\}, & \partial Z/\partial\left\{Y\right\}&=\left\{A\right\},\\ \left[Z\right]&=\left\{Y\right\}^T\left[B\right]\left\{Y\right\}, & \partial Z/\partial\left\{Y\right\}&=2\left[B\right]\left\{Y\right\}.\end{aligned} \tag{10}$$

Условие стационарности (1) с учетом правил (10) дает систему линейных уравнений

$$\sum_e \iiint_{V_e} \left(\left[B_S\right]^T \left[c\right]\left[B_S\right]\left\{u_i\right\} - \omega^2 \rho \left[N_u\right]^T \left[N_u\right]\left\{u_i\right\} \right) dV - \sum_{e_1} \iint_{S_e} \left[N_u\right]^T \left\{f\right\} dS = 0. \quad (11)$$

Система (11) определяет глобальную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых смещений $\{u_i\}$. Она описывает поведение упругого тела конечных размеров; таким образом, вариационная постановка задачи с применением МКЭ приводит к линейной системе уравнений.

Поверхностный интеграл в (11) учитывается только для конечных элементов, выходящих на поверхность S_1, и определяет внешние узловые силы

$$\{F\} = \sum_{e_1} \iint_{S_e} \left[N_u\right]^T \{f\} dS. \quad (12)$$

Введем элементные матрицы жесткости и массы

$$\{k_{uu}\} = \iiint_{V_e} \left[B_S\right]^T \left[c\right]\left[B_S\right] dV, \qquad \{m\} = \iiint_{V_e} \left[N_u\right]^T \left[N_u\right] dV. \quad (13)$$

Элементные массы жесткости и массы (13) определяются тройными интегралами по объему каждого отдельного конечного элемента, поэтому упругие свойства и плотность могут быть различны для разных конечных элементов. Это обстоятельство позволяет весьма просто формировать глобальные матрицы для сложных конструкций, состоящих из различных материалов, и является важным преимуществом МКЭ.

Перепишем систему (11) с учетом обозначений (12) и (13)

$$\left(\sum_e \left[k_{uu}\right] - \omega^2 \rho \sum_e \left[m\right] \right) \{u_i\} = \{F\}. \quad (14)$$

Глобальные матрицы жесткости и массы определяются структурным суммированием соответствующих элементных матриц

$$\left[K_{uu}\right] = \sum_e \left[k_{uu}\right], \qquad \left[M\right] = \sum_e \left[m\right]. \quad (15)$$

С учетом обозначений (15) запишем в окончательном виде

$$\left(\left[K_{uu}\right] - \omega^2 \rho \left[M\right] \right) \{u_i\} = \{F\}. \quad (16)$$

Механические граничные условия на свободных поверхностях: отсутствие нормальных и касательных механических напряжений учтены «автоматически» в вариационной постановке задачи при выводе уравнения (16). Часто исследуемое упругое тело имеет плоскости симметрии (или линии симметрии в плоском случае). Это позволяет снизить порядок глобальной системы уравнений, так как в этом случае достаточно аппроксимировать конечными элементами только часть тела. На плоскостях симметрии должны быть заданы механические граничные условия, позволяющие выделить колебания определенного типа. Например, в случае симметричной круглой пластины на ее плоскости симметрии при выделении симметричных по толщине колебаний должны обращать в нуль осевые компоненты смещения. Следовательно, соответствующие строки и столбцы глобальных матриц должны быть обнулены. Очевидно, что при этом глобальные матрицы становятся сингулярными и не допускают обращения, которое необходимо при анализе собственных колебаний. Поэтому данные строки и столбцы удаляются из глобальных матриц, что также несколько понижает их порядок.

При отсутствии внешних воздействий $\{F\}=0$ и уравнение (16) принимает вид

$$\left(\left[K_{uu}\right]-\omega^2\rho\left[M\right]\right)\{u_i\}=0. \tag{17}$$

Это равенство возможно только при некоторых значениях ω – собственных частотах системы, если определитель системы равен нулю

$$\det\left[\left[K_{uu}\right]-\omega^2\rho\left[M\right]\right]=0. \tag{18}$$

Каждая собственная частота, при которой выполняется условие (18), определяет собственный вектор $\{u_i\}_n$ (распределение узловых смещений, позволяющее судить о форме колебаний), компоненты его произвольны, а их отношения принимают определенные значения. Такие векторы называются модами системы [1].

При нахождении собственных частот обычно не ищут корни определителя (18), а решают обобщенную матричную задачу на собственные значения. Введем обозначение $\lambda_1=\omega^2\rho,$ тогда уравнение (17) примет вид

$$\left[K_{uu}\right]\{u_i\}=\lambda_1\left[M\right]\{u_i\}. \tag{19}$$

Как отмечено в [3], эта задача не тривиальна и почти не рассматривается в обычных учебниках по линейной алгебре. Умножив уравнение (19) на $\left[K_{uu}\right]^{-1}$ и введя обозначение $\lambda=1/\lambda_1,$ получим

$$\left[H\right]\{u_i\}=\lambda\{u_i\}, \tag{20}$$

где $\left[H\right]=\left[K_{uu}\right]^{-1}\left[M\right]$.

Задачи вида (20) решались авторами [4] итерационным методом в сочетании с методом «ловли льва в пустыне» [1] по разработанной программе на языке Фортран.

Выводы

Из условия стационарности лагранжиана получена система линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов для описания упругого тела произвольной формы и размеров. Объяснена структура элементных матриц жесткости и массы. Рассмотрено применение полученной системы уравнений для анализа собственных колебаний ограниченных упругих тел. Показано, как можно понизить порядок глобальной системы уравнений для упругого тела, обладающего плоскостями симметрии. Рассмотрена обобщенная матричная задача на собственные значения и указан метод ее решения путем сведения к обычной задаче с использованием обращения глобальной матрицы жесткости.

Список литературы

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 544 с.
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
3. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 352 с.
4. Балабаев С.М., Ивина Н.Ф. Компьютерное моделирование и анализ собственных колебаний пьезопреобразователей методом конечных элементов. Владивосток: Дальрыбвтуз, 2007. 242 с.

Сведения об авторах: Балабаев Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: ivinanata@yandex.ru;

Ивина Наталья Федоровна, доктор технических наук, доцент, e-mail: ivinanata@yandex.ru.