ПРОМЫШЛЕННОЕ РЫБОЛОВСТВО. АКУСТИКА

УДК 539.3

С.М. Балабаев, Н.Ф. Ивина
Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет,
690087, г. Владивосток, ул. Луговая, 52б

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОГО ПЬЕЗОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ В ФОРМЕ ПОЛОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Получена система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая собственные колебания пьезопреобразователя в форме полого эллиптического цилиндра. Для решения поставленной задачи применена теория электромагнитного поля, теория упругости и электроупругости, уравнения математической физики, элементы тензорного анализа и ортогональные криволинейные координаты.

Ключевые слова: *пьезопреобразователь, ортогональные криволинейные координаты, собственные колебания.*

S.M. Balabaev, N.F. Ivina

MATHEMATICAL MODEL OF HYDROACOUSTIC PIEZOTRANSDUCER IN THE FORM OF A HOLLOW ELLIPTIC CYLINDER

The system of partial differential equations describing the natural oscillations of the piezoelectric transducer in the form of a hollow elliptic cylinder is obtained. Electromagnetic field theory, theory of elasticity and electro-elasticity, equations of mathematical physics, elements of tensor analysis and orthogonal curvilinear coordinates applied to the solution of this problem.

Key words: *piezoelectric transducer, orthogonal curvilinear coordinates, natural oscillations.*

Введение

Пьезокерамические преобразователи (пьезопреобразователи) являются одним из основных типов гидроакустических излучателей и приемников, применяемых на практике. Одним из достоинств пьезокерамики является возможность изготовления преобразователей различных геометрических форм. К настоящему времени разработана в основном классическая одномерная теория расчета пьезопреобразователей простейших геометрических форм: длинных стержней, коротких и длинных полых круговых цилиндров, тонких пластин. Эта теория не охватывает другие типы преобразователей, представляющих практический интерес с точки зрения получения широкой полосы излучения и формирования заданных характеристик направленности.

Для анализа математических моделей пьезопреобразователей классических типов применяются самые простые системы координат: прямоугольная и цилиндрическая. Это связано с тем, что их одномерные математические модели описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые в этих системах имеют наиболее простой вид. Кроме того, в применяемом математическом аппарате необходимо, чтобы пьезопреобразователь был ограничен координатными поверхностями соответствующей системы координат, на которых задаются необходимые краевые условия.

Применение других известных систем ортогональных криволинейных координат позволит разработать математические модели пьезопреобразователей неклассических форм, например, в виде эллиптического цилиндра, эллипсоида вращения и некоторых других. Эти преобразователи могут обладать и определенными преимуществами при использовании их в качестве гидроакустических излучателей с точки зрения расположения в корпусе обтекателя подводного аппарата и формирования определенной характеристики направленности.

Целью настоящей работы является разработка математической модели преобразователя неклассического типа в виде эллиптического полого цилиндра.

Объекты и методы исследований

Объектом исследования является гидроакустический излучатель неклассического типа в форме полого эллиптического цилиндра, ограниченный координатными поверхностями эллиптической цилиндрической системы криволинейных ортогональных координат. Для решения поставленной задачи применена теория электромагнитного поля, теория упругости и электроупругости, уравнения математической физики, элементы тензорного анализа и ортогональные криволинейные координаты.

Результаты и их обсуждение

Предварительно рассмотрим систему эллиптических цилиндрических координат [1–3]. Координатными линиями этой системы в плоскости xOy являются два взаимно ортогональных семейства софокусных эллипсов и гипербол. При параллельном переносе по перпендикуляру к плоскости xOy рассматриваемые эллипсы и гиперболы опишут эллиптические и гиперболические цилиндры, образующие две системы взаимно ортогональных поверхностей. Третья система координатных поверхностей состоит из плоскостей, параллельных плоскости xOy. Уравнения координатных поверхностей в прямоугольной (x, y, z) и эллиптической цилиндрической системах (v, η, z) имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{d^2 ch^2 v} + \dfrac{y^2}{d^2 sh^2 v} = 1, \\ \dfrac{x^2}{d^2 \cos^2 \eta} - \dfrac{y^2}{d^2 \sin^2 \eta} = 1, \\ z = const. \end{cases} \qquad \begin{cases} v = const, \\ \eta = const, \\ z = const. \end{cases}$$

Эллиптические цилиндрические координаты связаны с прямоугольными координатами соотношениями

$$\begin{cases} x = dchv \cos\eta, \\ y = dshv \sin\eta, \\ z = z. \end{cases}$$

Так как поляризация рассматриваемого цилиндра предполагается перпендикулярной к цилиндрическим эллиптическим поверхностям (частным случаем является хорошо известный радиально поляризованный круговой пьезоцилиндр), то криволинейные эллиптические координаты должны быть пронумерованы следующим образом: $\alpha_1 = z$, $\alpha_2 = \eta$, $\alpha_3 = v$.

Тогда коэффициенты Ляме [4] равны $h_1 = 1$, $h_2 = h_3 = dh$, где $h = \left(sh^2 v + \sin^2 \eta\right)^{1/2}$, $2d$ – расстояние между фокусами.

Векторные дифференциальные операторы

Градиент

$$grad\Phi = \frac{1}{dh}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\overline{e}_v + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\overline{e}_\eta\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\overline{e}_z., \tag{1}$$

где $\overline{e}_v$, $\overline{e}_\eta$, $\overline{e}_z$ – единичные векторы, касательные к соответствующим координатным линиям и направленные в сторону возрастания этих параметров.

Дивергенция

$$div\overline{u} = \frac{1}{2dh^3}\left(sh2vu_v + \sin 2\eta u_\eta\right) + \frac{1}{dh}\left(\frac{\partial u_v}{\partial v} + \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{2}$$

Ротор

$$rot\,\overline{u} = \left(\frac{1}{dh}\frac{\partial u_z}{\partial \eta} - \frac{\partial u_\eta}{\partial z}\right)\overline{e}_v + \left(\frac{\partial u_v}{\partial z} - \frac{1}{dh}\frac{\partial u_z}{\partial v}\right)\overline{e}_\eta +$$

$$+\left[\frac{1}{2dh^3}\left(sh2vu_\eta - \sin 2\eta u_v\right) + \frac{1}{dh}\left(\frac{\partial u_\eta}{\partial v} - \frac{\partial u_v}{\partial \eta}\right)\right]\overline{e}_z. \tag{3}$$

Теперь можно приступить к разработке математической модели пьезопреобразователя в виде полого эллиптического цилиндра. Пьезопреобразователь выполнен из пьезокерамики и ограничен двумя эллиптическими цилиндрами, на которых нанесены серебряные электроды. Большая полуось внутреннего эллипса равна a, большая полуось внешнего эллипса равна b. Преобразователь может быть акустически нагружен по внешней поверхности и иметь внутреннее заполнение. В режиме излучения на пьезопреобразователь подается электрическое напряжение $V\exp(-i\omega t)$ (V – амплитуда электрического напряжения; ω – круговая частота; t – время; i – мнимая единица). В режиме приема упругая волна, падающая на преобразователь, генерирует в нем электрическое напряжение, которое снимается с его электродов и подается на электронный блок.

В основу решения задачи о колебаниях пьезопреобразователя должны быть положены дифференциальные уравнения движения, уравнения Максвелла для электромагнитного поля, система электромеханических уравнений состояния и граничные условия для упругих и электрических полевых тензоров.

Поскольку в интересующем нас диапазоне частот размеры преобразователя значительно меньше длины электромагнитной волны, уравнения Максвелла можно заменить уравнениями электростатики, которые при отсутствии свободных зарядов имеют вид

$$div\,\overline{D} = 0, \tag{4}$$

$$rot\,\overline{E} = 0, \tag{5}$$

где $\overline{D}$ – вектор электрической индукции; $\overline{E}$ – напряженность электрического поля.

Дифференциальные уравнения движения в тензорной записи имеют вид [5]

$$\rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \alpha_l}, \tag{6}$$

где ρ – плотность пьезокерамики; u_k – компонента смещения, σ_{kl} – тензор напряжений.

Систему электромеханических уравнений состояния запишем в виде

$$\begin{cases} \sigma_{kl} = c^E_{klij} s_{ij} - e_{klm} E_m, \\ D_n = e_{nij} s_{ij} + \varepsilon^s_{nm} E_m, \end{cases} \tag{7}$$

где c^E_{klij} – тензор модулей упругости при постоянном электрическом поле; e_{klm} – тензор пьезоэлектрических постоянных; s_{ij} – тензор деформации; ε^s_{nm} – тензор диэлектрической проницаемости при постоянной деформации.

Перепишем систему (7) в матричных обозначениях

$$\begin{cases} \sigma_i = c^E_{ij} s_j - e_{im} E_m, \quad (i, j = 1 \div 6), & (8) \\ D_n = e_{nj} s_j + \varepsilon^s_{nm} E_m, \quad (m, n = 1 \div 3). & (9) \end{cases}$$

В дальнейшем анизотропией пьезокерамики и прямым пьезоэффектом будем пренебрегать, поскольку такое же допущение принимается и в большинстве работ, в которых рассматривается классическая одномерная теория для пьезопреобразователей известных типов. Тогда упругие постоянные керамики будут описываться только двумя упругими постоянными Ламе: λ и μ. Также предполагаем, что у индукции и напряженности электрического поля отлична от нуля только одна компонента (D_v, E_v), перпендикулярная координатным поверхностям, на которых нанесены электроды. Тогда уравнение (9) запишем в виде

$$D_v = \varepsilon E_v. \tag{10}$$

Ограничимся анализом работы пьезопреобразователя в режиме излучения при гармонической зависимости от времени $\exp(-i\omega t)$, временной множитель в дальнейших выкладках опускается.

Из уравнения (4) с учетом (10) находим напряженность $E_v = C / h$. Проинтегрировав напряженность, определим C. В результате получим

$$E_v = V \Big/ \left(dh \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - d^2}}{a + \sqrt{a^2 - d^2}} \right).$$

Введем обозначение $V_1 = V \Big/ \left(\ln \frac{b + \sqrt{b^2 - d^2}}{a + \sqrt{a^2 - d^2}} \right)$, тогда $E_v = V_1 / (dh)$.

Условие (5) также выполняется:

$$rot\overline{E} = \left[\frac{1}{2dh^3} \left(-\sin 2\eta \frac{V_1}{dh} \right) - \frac{1}{dh} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_1}{dh} \right) \right] \overline{e}_z = \left(-\frac{V_1 \sin 2\eta}{2d^2 h^4} + \frac{V_1 \sin 2\eta}{2d^2 h^4} \right) \overline{e}_z = 0.$$

В статье [4] для описания колебаний пьезопреобразователя в произвольной ортогональной системе криволинейных координат получено неоднородное векторное дифференциальное уравнение

$$(\lambda + 2\mu) grad(div\overline{u}) - \mu rot(rot\overline{u}) + \rho\omega^2 \overline{u} = -\overline{F}, \tag{11}$$

где $\overline{F}$ – возбуждающая сила, обусловленная электрическим полем.

Распишем векторное уравнение движения (11) для компонент смещения, используя выражения для векторных дифференциальных операторов (1–3), в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных для пьезопреобразователя рассматриваемого типа:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_v}{\partial v^2} + \mu \frac{\partial^2 u_v}{\partial \eta^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_\eta}{\partial \eta \partial v} - (\lambda + 3\mu) \frac{sh2v}{2h^2} \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} +$$

$$+ (\lambda + 3\mu) \frac{\sin 2\eta}{2h^2} \frac{\partial u_\eta}{\partial v} + \frac{u_v}{4h^4} \left[\lambda \left(4h^2 ch2v - 3sh^2 2v \right) + 4\mu h^2 \left(2ch2v + \cos 2\eta \right) - \right.$$

$$\left. -3\mu \left(2sh^2 2v + \sin^2 2\eta \right) \right] - \frac{3u_\eta (\lambda + \mu) sh2v \sin 2\eta}{4h^4} + \rho\omega^2 d^2 h^2 u_v = -d^2 h^2 F_v,$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_\eta}{\partial \eta^2} + \mu \frac{\partial^2 u_\eta}{\partial v^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_v}{\partial \eta \partial v} - (\lambda + 3\mu) \frac{\sin 2\eta}{2h^2} \frac{\partial u_v}{\partial v} + \tag{12}$$

$$+ (\lambda + 3\mu) \frac{\mathrm{s}h2v}{2h^2} \frac{\partial u_v}{\partial \eta} + \frac{u_\eta}{4h^4} \left[\lambda \left(4h^2 \cos 2\eta - 3\sin^2 2\eta \right) + 4\mu h^2 \left(2\cos 2\eta + \mathrm{c}h2v \right) - \right.$$

$$\left. -3\mu \left(2\sin^2 2\eta + \mathrm{s}h^2 2v \right) \right] - \frac{3u_v (\lambda + \mu) sh2v \sin 2\eta}{4h^4} + \rho\omega^2 d^2 h^2 u_\eta = -d^2 h^2 F_\eta.$$

Выражения для компонент возбуждающей электрической силы для общего случая получены в статье [4], приведем их окончательные выражения для рассматриваемого типа пьезопреобразователя:

$$F_\eta = \frac{1}{d^2h^2}\left[e_{33}\frac{V_1}{dh}\frac{\partial(dh)}{\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\eta}\left(dhe_{31}\frac{V_1}{dh}\right)\right] = \frac{V_1 e_{33}\sin 2\eta}{2d^2h^4},$$

$$F_v = \frac{1}{d^2h^2}\left[e_{31}\frac{V_1}{dh}\frac{\partial(dh)}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}\left(dhe_{33}\frac{V_1}{dh}\right)\right] = \frac{V_1 e_{31}\,\mathrm{s}h2v}{2d^2h^4}.$$

Если пьезопреобразователь нагружен с акустической стороны, то уравнения движения пассивной среды получаются из (12) при $\overline{F} \equiv 0$. Также будем полагать, что пьезопостоянные не зависят от координат, такое допущение будет справедливо, если поляризация всех участков пьезокерамики достигла насыщения.

На свободных поверхностях пьезопреобразователя должны выполняться следующие граничные условия: отсутствие касательных и нормальных механических напряжений. На нагруженных на жидкость поверхностях преобразователя должны выполняться граничные условия: отсутствие касательных напряжений, непрерывность нормальных смещений и нормальных напряжений.

Компоненты тензора напряжений (закон Гука с учетом обратного пьезоэффекта: уравнение (8)), которые понадобятся при решении краевых задач для выполнения граничных условий, равны

$$\sigma_{vv} = \frac{(\lambda+2\mu)}{2dh^3}\left(2h^2\frac{\partial u_v}{\partial v} + \sin 2\eta u_\eta\right) + \frac{\lambda}{2dh^3}\left(sh2vu_v + 2h^2\frac{\partial u_\eta}{\partial\eta}\right) - e_{33}\frac{V_1}{dh},$$

$$\sigma_{\eta\eta} = \frac{(\lambda+2\mu)}{2dh^3}\left(2h^2\frac{\partial u_\eta}{\partial\eta} + sh2vu_v\right) + \frac{\lambda}{2dh^3}\left(\sin 2\eta u_\eta + 2h^2\frac{\partial u_v}{\partial v}\right) - e_{31}\frac{V_1}{dh},$$

$$\sigma_{v\eta} = \frac{\mu}{2dh^3}\left[2h^2\left(\frac{\partial u_v}{\partial\eta} + \frac{\partial u_\eta}{\partial v}\right) - \sin 2\eta u_v - sh2vu_\eta\right].$$

Выводы

На основе теории электромагнитного поля, теории упругости и электроупругости, уравнений математической физики и элементов тензорного анализа получена математическая модель пьзопреобразователя в форме полого эллиптического цилиндра в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных (12). Решение полученной системы дифференциальных уравнений при соответствующих граничных условиях существующими аналитическими методами представляет значительные (и, вероятно, непреодолимые в настоящее время) математические трудности. Именно поэтому аналитическими методами решены только простейшие одномерные задачи для преобразователей классических типов. Более перспективными и реальными методами анализа пьезопреобразователей нетрадиционных типов являются численные методы. Для анализа собственных колебаний преобразователей – метод конечных элементов. Для анализа акустического излучения – комбинированный метод конечных и граничных элементов и комбинированные

численно-аналитические методы. Достаточно подробно все эти методы рассмотрены в монографиях авторов [6–8] для анализа неодномерных моделей преобразователей классических типов.

Список литературы

1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М. : Наука, 1967. 780 с.

2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М. : Наука, 1973. 832 с.

3. Маделунг Э. Математический аппарат физики. М. : Наука, 1968. 620 с.

4. Балабаев С.М., Ивина Н.Ф. Гидроакустические преобразователи нетрадиционных типов и их математические модели // Науч. тр. Дальрыбвтуза. Владивосток : Дальрыбвтуз, 2016. Т. 39. С. 81–88.

5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М. : Наука, 1987. 248 с.

6. Балабаев С.М., Ивина Н.Ф. Компьютерное моделирование колебаний и излучения тел конечных размеров (методы конечных и граничных элементов). Владивосток : Дальнаука, 1996. 213 с.

7. Балабаев С.М., Ивина Н.Ф. Компьютерное моделирование и анализ собственных колебаний пьезопреобразователей методом конечных элементов. Владивосток : Дальрыбвтуз, 2007. 242 с.

8. Балабаев С.М., Ивина Н.Ф. Компьютерное моделирование и анализ излучения гидроакустических пьезопреобразователей и антенн. Владивосток : Дальрыбвтуз, 2013. 196 с.

Сведения об авторах: Балабаев Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: ivinanata@yandex.ru;

Ивина Наталья Федоровна, доктор технических наук, доцент, e-mail: ivinanata@yandex.ru.