ПРОМЫШЛЕННОЕ РЫБОЛОВСТВО. АКУСТИКА

УДК 539.3

С.М. Балабаев, Н.Ф. Ивина
Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет,
690087, г. Владивосток, ул. Луговая, 52б

ГИДРОАКУСТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ НЕТРАДИЦИОННЫХ ТИПОВ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Получено векторное дифференциальное уравнение, описывающее собственные колебания пьезопреобразователей в произвольной системе ортогональных криволинейных координат. Оно применимо для анализа преобразователей нетрадиционных типов: в виде эллипсоида вращения, эллиптического цилиндра, однополостного гиперболоида вращения и некоторых других. Для решения поставленной задачи применена теория электромагнитного поля, теория упругости и электроупругости, уравнения математической физики, элементы тензорного анализа и ортогональные криволинейные координаты.

Ключевые слова: *пьезопреобразователь, ортогональные криволинейные координаты, собственные колебания.*

S.M. Balabaev, N.F. Ivina

HYDROACOUSTIC TRANSDUCERS UNCONVENTIONAL TYPES AND THEIR MATHEMATICAL MODELI

The vector differential equation describing the natural oscillations of the piezoelectric transducers in the system of arbitrary orthogonal curvilinear coordinates is obtained. It is applicable for the analysis of unconventional types of transducers: in the form of a rotational ellipsoid, an elliptic cylinder, a one-sheet hyperboloid of rotation and some other. Electromagnetic field theory, theory of elasticity and electroelasticity, equations of mathematical physics, elements of tensor analysis and orthogonal curvilinear coordinates applied to the solution of this problem.

Key words: *piezoelectric transducer, orthogonal curvilinear coordinates, natural oscillations.*

Введение

Одним из основных типов гидроакустических преобразователей являются пьезоэлектрические преобразователи (пьезопреобразователи), изготавливаемые в настоящее время из пьезокерамики. Пьезокерамика обладает высоким пьезомодулем, относительно большой механической и электрической прочностью, значительной диэлектрической проницаемостью. Исходное сырье для ее получения дешево, технология изготовления сравнительно проста. Входное сопротивление пьезокерамики невелико, поэтому для ее возбуждения требуется небольшое электрическое напряжение. Достоинством пьезокерамики является также возможность изготовления преобразователей различных геометрических форм.

Для анализа математических моделей пьезопреобразователей традиционных типов применяются самые простые системы координат: прямоугольная, цилиндрическая и сферическая. Это связано с тем, что их одномерные математические модели описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые в этих системах имеют наиболее простой вид. Кроме того, в применяемом математическом аппарате необходимо, чтобы пьезопреобразователь был ограничен координатными поверхностями соответствующей системы координат, на которых задаются необходимые краевые условия. Для анализа этих моделей используются следующие функции: в прямоугольной системе – тригонометрические функции и экспонента; в цилиндрической системе – цилиндрические функции Бесселя, Неймана, Ганкеля; в сферической системе – соответствующие сферические функции.

Разработана в основном одномерная аналитическая теория расчета пьезопреобразователей типа тонких пластин, длинных стержней, коротких и длинных полых цилиндров, сфер. Эта теория не обеспечивает необходимую точность при расчете преобразователей произвольных размеров. Кроме того, она не охватывает другие типы преобразователей, представляющих практический интерес с точки зрения получения широкой полосы излучения и фокусировки акустической энергии.

Применение других известных систем ортогональных координат позволит разработать математические модели пьезопреобразователей нетрадиционных форм, например, в виде эллиптического цилиндра, эллипсоида вращения, пьезоклина, однополостного гиперболоида вращения и некоторых других. Первые два типа преобразователей могут обладать и определенными преимуществами при использовании их в качестве гидроакустических излучателей с точки зрения расположения в корпусе обтекателя подводного аппарата и формирования определенной характеристики направленности.

Целью настоящей работы является разработка математической модели преобразователя в произвольной системе ортогональных криволинейных координат.

Объекты и методы исследований

Объектом исследования являются гидроакустические преобразователи неклассических форм, например, в виде оболочек вращения, ограниченные координатными поверхностями различных систем криволинейных ортогональных координат. Для решения поставленной задачи применена теория электромагнитного поля, теория упругости и электроупругости, уравнения математической физики, элементы тензорного анализа и ортогональные криволинейные координаты.

Результаты и их обсуждение

Предварительно рассмотрим необходимые сведения из теории ортогональных криволинейных координат [1–3].

Рассмотрим трехмерное пространство, в котором введена прямоугольная система координат x, y, z. Можно связать это пространство с системой криволинейных координат. Пусть между прямоугольными координатами x, y, z и криволинейными координатами $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ устанавливается взаимно однозначное соответствие (это может быть достигнуто как путем выбора вида функций f_i, так и путем надлежащего ограничения области изменения криволинейных координат), описываемое формулами

$$\begin{cases} x = f_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ y = f_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ z = f_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = g_1(x, y, z), \\ \alpha_2 = g_2(x, y, z), \\ \alpha_3 = g_3(x, y, z). \end{cases} \tag{1}$$

Уравнения $\alpha_1 = const,\ \alpha_2 = const,\ \alpha_3 = const$ представляют собой уравнения координатных поверхностей криволинейной системы в прямоугольной системе координат. Каждая пара координатных поверхностей, проходящих через фиксированную точку, образует в пересечении координатную линию. Параметрические уравнения координатных линий получаются из уравнений (1), если в них поочередно изменять только одну из переменных $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$, оставляя при этом неизменными остальные две.

Обозначим единичные векторы, касательные к координатным линиям $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ и направленные в сторону возрастания этих параметров, через $\overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ \overline{e}_3$. Эти три вектора образуют в каждой точке триэдр локальных координатных осей. Метод криволинейных координат состоит в том, что при рассмотрении поля векторов (например, поля перемещений или скоростей точек сплошной среды) каждый вектор проектируется на оси локального триэдра, построенного именно в той точке, где данный вектор приложен. Ввиду того, что направления вышеуказанных координатных осей $\overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ \overline{e}_3$ изменяются при переходе от одной точки к другой, проекции на эти оси не будут подчиняться известному из теории декартовых координат правилу, согласно которому проекция производной вектора равна производной от его проекции (речь идет о дифференцировании по α_j) [1].

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только ортогональных криволинейных координат, т. е. таких, у которых координатные линии $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ пересекаются под прямыми углами. Условиями этого являются векторные равенства $\overline{e}_1\overline{e}_2 = \overline{e}_2\overline{e}_3 = \overline{e}_1\overline{e}_3 = 0$.

Квадрат элемента длины ds в прямоугольных координатах дается формулой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 .$$

В случае ортогональных криволинейных координат эта формула приобретает следующий вид:

$$ds^2 = h_1^2 d\alpha_1^2 + h_2^2 d\alpha_2^2 + h_3^2 d\alpha_3^2 ,$$

где h_1^2, h_2^2, h_3^2 обозначают величины

$$h_j^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_j}\right)^2 .$$

Величины h_1, h_2, h_3 называются коэффициентами Ламе. Эти три коэффициента равны отношениям приращений дуг координатных линий к соответствующим приращениям криволинейных координат. Так как величины h_1, h_2, h_3 являются функциями координат точки, их называют также единицами локальной длины.

Не трудно показать, что необходимым и достаточным условием ортогональности системы криволинейных координат является условие, чтобы выражение ds^2 содержало только члены с квадратами дифференциалов.

Запишем выражения для дифференциальных операторов в ортогональных криволинейных координатах.

Градиент

$$grad\Phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_1}\overline{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_2}\overline{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_3}\overline{e}_3. \tag{2}$$

Дивергенция

$$div\overline{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_2 h_3 u_1)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 u_2)}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 u_3)}{\partial\alpha_3}\right]. \tag{3}$$

Ротор

$$rot\,\overline{u} = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial\alpha_3}\right]\overline{e}_1 + \frac{1}{h_1 h_3}\left[\frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial\alpha_3} - \frac{\partial(u_3 h_3)}{\partial\alpha_1}\right]\overline{e}_2 +$$

$$+\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial\alpha_2}\right]\overline{e}_3. \tag{4}$$

Теперь можно приступить к разработке математической модели пьезопреобразователя в произвольной системе ортогональных криволинейных координат. Пьезопреобразователь выполнен из пьезокерамики и ограничен соответствующими координатными поверхностями. На некоторых из координатных поверхностей нанесены серебряные электроды. В режиме излучения на пьезопреобразователь подается электрическое напряжение $V\exp(-i\omega t)$ (V – амплитуда электрического напряжения; ω – круговая частота; t – время; i – мнимая единица). В режиме приема упругая волна, падающая на преобразователь, генерирует в нем электрическое напряжение, которое снимается с его электродов и подается на электронный блок.

В основу решения задачи о колебаниях пьезопреобразователя должны быть положены дифференциальные уравнения движения, уравнения Максвелла для электромагнитного поля, система электромеханических уравнений состояния и граничные условия для упругих и электрических полевых тензоров.

Поскольку в интересующем нас диапазоне частот размеры преобразователя значительно меньше длины электромагнитной волны, уравнения Максвелла можно заменить уравнениями электростатики, которые при отсутствии свободных зарядов имеют вид

$$\begin{aligned} div\,\overline{D} &= 0, \\ rot\,\overline{E} &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\overline{D}$ – вектор электрической индукции; $\overline{E}$ – напряженность электрического поля.

Дифференциальные уравнения движения в тензорной записи имеют вид [4]

$$\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial\alpha_l}, \tag{6}$$

где ρ – плотность пьезокерамики, u_k – компонента смещения, σ_{kl} – тензор напряжений.

Распишем уравнения (6) для проекций вектора смещения:

$$\overline{u} = u_1\overline{e}_1 + u_2\overline{e}_2 + u_3\overline{e}_3,$$

$$h_1h_2h_3\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(h_2h_3\sigma_{11}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(h_1h_3\sigma_{12}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(h_1h_2\sigma_{13}\right) +$$

$$+h_3\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{12} + h_2\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_3}\sigma_{13} - h_3\frac{\partial h_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{22} - h_2\frac{\partial h_3}{\partial\alpha_1}\sigma_{33},$$

$$h_1h_2h_3\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(h_1h_3\sigma_{22}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(h_1h_2\sigma_{23}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(h_2h_3\sigma_{12}\right) +$$

$$+h_1\frac{\partial h_2}{\partial\alpha_3}\sigma_{23} + h_3\frac{\partial h_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{12} - h_1\frac{\partial h_3}{\partial\alpha_2}\sigma_{33} - h_3\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{11}, \qquad (7)$$

$$h_1h_2h_3\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(h_1h_2\sigma_{33}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(h_2h_3\sigma_{13}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(h_1h_3\sigma_{23}\right) +$$

$$+h_2\frac{\partial h_3}{\partial\alpha_1}\sigma_{13} + h_1\frac{\partial h_3}{\partial\alpha_2}\sigma_{23} - h_2\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_3}\sigma_{11} - h_1\frac{\partial h_2}{\partial\alpha_3}\sigma_{22}.$$

Систему электромеханических уравнений состояния запишем в виде

$$\begin{cases} \sigma_{kl} = c^E_{klij}s_{ij} - e_{klm}E_m, \\ D_n = e_{nij}s_{ij} + \varepsilon^s_{nm}E_m, \end{cases} \qquad (8)$$

где c^E_{klij} – тензор модулей упругости при постоянном электрическом поле; e_{klm} – тензор пьезоэлектрических постоянных; s_{ij} – тензор деформации; ε^s_{nm} – тензор диэлектрической проницаемости при постоянной деформации. Перепишем систему (8) в матричных обозначениях

$$\begin{cases} \sigma_i = c^E_{ij}s_j - e_{im}E_m, \quad (i, j = 1 \div 6), & (9) \\ D_n = e_{nj}s_j + \varepsilon^s_{nm}E_m, \quad (m, n = 1 \div 3). & (10) \end{cases}$$

В дальнейшем анизотропией пьезокерамики и прямым пьезоэффектом будем пренебрегать, поскольку такое же допущение принимается и в большинстве работ, в которых рассматривается классическая одномерная теория. Также предполагаем, что у индукции и напряженности электрического поля отлична от нуля только одна компонента (D_3, E_3), перпендикулярная координатным поверхностям, на которых нанесены электроды. Тогда закон Гука с учетом обратного пьезоэффекта (9) запишем в виде

$$\sigma_{11} = 2\mu s_{11} + \lambda s - e_{31}E_3, \quad \sigma_{22} = 2\mu s_{22} + \lambda s - e_{31}E_3,$$
$$\sigma_{33} = 2\mu s_{33} + \lambda s - e_{33}E_3, \tag{11}$$
$$\sigma_{12} = \mu s_{12},\ \sigma_{13} = \mu s_{13},\ \sigma_{23} = \mu s_{23},$$

а уравнение (10) в виде

$$D_3 = \varepsilon E_3, \tag{12}$$

где λ, μ – упругие постоянные Ламе; компоненты деформации равны:

$$s_{11} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_2}u_2 + \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \alpha_3}u_3,$$

$$s_{22} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_3}u_2 + \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha_1}u_1,$$

$$s_{33} = \frac{1}{h_3}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_1}u_1 + \frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha_2}u_2,$$

$$s_{12} = \frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{u_2}{h_2}\right) + \frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{u_1}{h_1}\right),\ s_{23} = \frac{h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{u_3}{h_3}\right) + \frac{h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial \alpha_3}\left(\frac{u_2}{h_2}\right),$$

$$s_{13} = \frac{h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{u_3}{h_3}\right) + \frac{h_1}{h_3}\frac{\partial}{\partial \alpha_3}\left(\frac{u_1}{h_1}\right),$$

$$s = div\bar{u} = s_{11} + s_{22} + s_{33} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{\partial\left(h_2 h_3 u_1\right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial\left(h_1 h_3 u_2\right)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial\left(h_1 h_2 u_3\right)}{\partial \alpha_3}\right).$$

Ограничимся анализом работы пьезопреобразователя в режиме излучения при гармонической зависимости от времени $\exp(-i\omega t)$, временной множитель в дальнейших выкладках опускается.

Методика вывода уравнений колебания пьезопреобразователя следующая. Из уравнения (5) находим индукцию, а из (12) – напряженность электрического поля. Затем для конкретного типа пьезопреобразователя вычисляем компоненты тензора напряжений (11) и подставляем их в уравнения (7). Однако в общем случае при рассмотрении преобразователей нескольких типов рациональнее сначала выделить в уравнениях (7) компоненты возбуждающей силы, обусловленной электрическим полем. Тогда для описания колебаний пьезопреобразователя получаем неоднородное векторное дифференциальное уравнение

$$(\lambda + 2\mu) grad(div\overline{u}) - \mu rot(rot\overline{u}) + \rho\omega^2\overline{u} = -\overline{F}. \qquad (13)$$

В этом случае при выводе уравнений для компонент вектора смещения можно воспользоваться выражениями для векторных дифференциальных операторов: градиента, дивергенции и ротора (2–4). Подставляя в уравнения (7) выражения для слагаемых компонент тензора деформации, обусловленных обратным пьезоэффектом, для компонент возбуждающей силы получим

$$F_1 = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(h_3e_{31}E_3\frac{\partial h_2}{\partial\alpha_1} + h_2e_{33}E_3\frac{\partial h_3}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(h_2h_3e_{31}E_3\right)\right),$$

$$F_2 = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(h_1e_{33}E_3\frac{\partial h_3}{\partial\alpha_2} + h_3e_{31}E_3\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(h_1h_3e_{31}E_3\right)\right),$$

$$F_3 = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(h_2e_{31}E_3\frac{\partial h_1}{\partial\alpha_3} + h_1e_{31}E_3\frac{\partial h_2}{\partial\alpha_3} - \frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(h_1h_2e_{33}E_3\right)\right).$$

Если пьезопреобразователь нагружен с акустической стороны, то уравнение движения пассивной среды получается из (13) при $F \equiv 0$. Также будем полагать, что пьезопостоянные не зависят от координат, такое допущение будет справедливо, если поляризация всех участков пьезокерамики достигла насыщения.

На свободных поверхностях пьезопреобразователя должны выполняться следующие граничные условия: отсутствие касательных и нормальных механических напряжений. На нагруженных на жидкость поверхностях преобразователя должны выполняться граничные условия: отсутствие касательных напряжений, непрерывность нормальных смещений и нормальных напряжений.

Выводы

На основе теории электромагнитного поля, теории упругости и электроупругости, уравнений математической физики и элементов тензорного анализа получено векторное дифференциальное уравнение, описывающее собственные колебания пьезопреобразователей в произвольной системе ортогональных криволинейных координат. Оно применимо для анализа преобразователей нетрадиционных типов: в виде эллипсоида вращения, эллиптического цилиндра, однополостного гиперболоида вращения и некоторых других. Решение полученного векторного уравнения (13) для конкретного типа пьезопреобразователя при соответствующих граничных условиях существующими аналитическими методами представляет значительные (и, вероятно, непреодолимые в настоящее время) математические трудности. Именно поэтому аналитическими методами решены только простейшие одномерные задачи для преобразователей классических типов. Более перспективными и реальными методами анализа пьезопреобразователей нетрадиционных типов являются численные методы. Для анализа собственных колебаний преобразователей – метод конечных элементов. Для анализа акустического излучения – комбинированный метод конечных и граничных элементов и комбинированные численно-аналитические методы. Достаточно подробно все эти методы рассмотрены в монографиях авторов [5–7] для анализа неодномерных моделей преобразователей классических типов.

Список литературы

1. Анго, А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М.: Наука, 1967. – 780 с.

2. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

3. Маделунг, Э. Математический аппарат физики / Э. Маделунг. – М.: Наука, 1968. – 620 с.

4. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987. – 248 с.

5. Балабае, С.М. Компьютерное моделирование колебаний и излучения тел конечных размеров (методы конечных и граничных элементов) / С.М. Балабаев, Н.Ф. Ивина. – Владивосток: Дальнаука, 1996. – 213 с.

6. Балабаев, С.М. Компьютерное моделирование и анализ собственных колебаний пьезопреобразователей методом конечных элементов / С.М. Балабаев, Н.Ф. Ивина. – Владивосток: Дальрыбвтуз, 2007. – 242 с.

7. Балабаев, С.М. Компьютерное моделирование и анализ излучения гидроакустических пьезопреобразователей и антенн / С.М. Балабаев, Н.Ф. Ивина. – Владивосток: Дальрыбвтуз, 2013. – 196 с.

Сведения об авторах: Балабаев Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: ivinanata@yandex.ru;

Ивина Наталья Федоровна, доктор технических наук, доцент, e-mail: ivinanata@yandex.ru.