

УДК 504.453:519.63

В.А. НаумовКалининградский государственный технический университет,
236022, г. Калининград, Советский пр., 1**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФFUЗНОГО
ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВОДОТОКОВ**

Предложена математическая модель распространения в водотоке загрязнений от диффузных источников. Система уравнений и граничные условия приведены к безразмерной форме. Поставленная параболическая краевая задача решена численным методом в среде Mathcad. Предложенная математическая модель позволяет рассчитывать профили концентрации примеси при различной интенсивности диффузных источников как на одном, так и на обоих берегах реки. С помощью этих данных можно оценить влияние загрязнения на экосистему водотока. Установлено, что использование рекомендуемой методическими указаниями формулы для коэффициента поперечной диффузии приводит к существенному занижению расчетных значений загрязнения водотока.

Ключевые слова: водоток, диффузное загрязнение, краевая задача, граничные условия, коэффициент поперечного рассеивания.

V.A. Naumov**MATHEMATICAL MODELING OF DIFFUSE POLLUTION IN WATERCOURSES**

The mathematical model of the watercourse spread pollution from diffuse sources was proposed. The system of equations and boundary conditions are reduced to dimensionless form. The parabolic boundary value problem was solved numerically in Mathcad. The proposed mathematical model allows to calculate the profiles of the concentration of impurities at various intensities of diffuse sources such as on one or on both sides of the river. Using these data we can estimate the effect of pollution on the ecosystem of the watercourse. The use of recommended guidelines, the formula for the coefficient of transverse diffusion leads to a significant underestimation of the calculated values of the watercourse pollution.

Key words: watercourse, diffuse pollution, boundary value problem, boundary conditions, coefficient of transverse dispersion.

Введение

Закономерности распространения загрязнений по водотокам очень важны для оценки состояния экологических систем водных объектов. Поэтому математическому моделированию таких процессов посвящено большое количество исследований [1–8]. Как отмечено в [5], загрязняющие вещества попадают в водные объекты не только из сосредоточенных источников (сбросы предприятий, городские очистные сооружения и т.д.), значительная их часть поступает с водосборных бассейнов. Причем в отличие от сосредоточенных стоков, которые могут быть проконтролированы в той или иной степени, такое диффузное загрязнение водотоков практически не поддается непосредственному контролю. В данной статье представлена математическая модель распространения примесей по водотоку при диффузном загрязнении.

Для решения практических задач распространения примесей по водотокам наиболее приемлемым является использование двумерных стационарных моделей переноса с осреднением концентрации пассивной примеси по глубине [2, 5, 6]. В данной работе рассматриваются процесс горизонтального распространения не осаждающейся консервативной взвеси. Предполагаем, что диффузные источники сохраняют свою интенсивность достаточно долго, чтобы можно было решать задачу в стационарном приближении.

Математическая постановка задачи

При указанных условиях эволюция средних значений концентрации примеси на вертикали $C(X, Y)$ описывается следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных [2, 6]:

$$U \frac{\partial C}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Y} (D \cdot Q), \quad Q = \frac{\partial C}{\partial Y}, \quad (1)$$

где X, Y – продольная и поперечная координаты; H – средняя глубина водотока; D – коэффициент поперечной турбулентной диффузии примеси.

Обычно полагают водоток прямолинейным, постоянной глубины H , со средней (по расходу) продольной скоростью $U = \text{const}$, при этом поперечная и вертикальная осредненные скорости водотока считают равными нулю. Ось Ox направим вдоль берега в сторону течения, ось Oy – поперек потока.

По физическому смыслу рассматриваемая задача является параболической. Для математической постановки параболической задачи необходимо задать граничные условия по концентрации в исходном сечении водотока $C(0, Y)$, ее производной по поперечной координате $Q(0, Y)$ и вдоль береговых линий вниз по течению. В исходном сечении задаем фоновое значение концентрации C_ϕ во всех точках. Так как вдоль береговой линии находятся диффузные источники загрязнения, то справедливы следующие граничные условия:

$$C(0, Y) = C_\phi; \quad Q(0, Y) = f_0(Y) \quad Q(X, 0) = f_1(X), \quad Q(X, B) = f_2(X), \quad (2)$$

где B – ширина водотока.

Приведем систему дифференциальных уравнений (1) и граничные условия (2) к безразмерной форме:

$$\frac{\partial c}{\partial x} = a \cdot \frac{\partial q}{\partial y}; \quad q = \frac{\partial c}{\partial y}; \quad c(0, y) = c_\phi; \quad q(0, n) = 0; \quad q(x, 0) = f_1(x); \quad q(x, 1) = f_2(x); \quad (3)$$

$$x = \frac{X}{B}; \quad y = \frac{Y}{B}; \quad q = \frac{Q \cdot B}{C_{\text{ПДК}}}; \quad a = \frac{D}{U \cdot B}; \quad c = \frac{C}{C_{\text{ПДК}}}, \quad (4)$$

где $C_{\text{ПДК}}$ – предельно допустимая концентрация рассматриваемого вещества в водотоке.

Расчет коэффициента поперечного рассеивания примеси

Коэффициент поперечной турбулентной диффузии рекомендуется в [9] для летнего времени вычислять по формуле

$$D = \frac{g \cdot U_{\text{cp}} \cdot H}{37 \cdot n \cdot Cs^2}, \quad (5)$$

где n – коэффициент шероховатости ложа реки, определяемый по справочным данным (по таблице М.Ф. Срибного); Cs – коэффициент Шези ($\text{м}^{0.5}/\text{с}$).

По формуле Н.Н. Павловского при $H \leq 5$ м:

$$Cs = R^{ys} / n, \quad ys = 2,5 \cdot \sqrt{n} - 0,13 - 0,75 \cdot \sqrt{R} \cdot (\sqrt{n} - 0,1), \quad (6)$$

где R – гидравлический радиус водотока, м (для широких водотоков $R \approx H$).

В [7] показано, что значительная часть экспериментальных данных по поперечному рассеиванию примеси в водотоках согласуется с эффективным коэффициентом, рассчитанным по формуле

$$D_{Э1} = 0,15 \frac{U_{cp} \cdot H \sqrt{g}}{C}. \quad (7)$$

Кроме турбулентной диффузии перенос примеси из одних частей потока в другие осуществляется механизмом конвекции. В упрощенной постановке, когда конвективными членами пренебрегают, из-за извилистости реки и других факторов приходится вводить поправки с помощью так называемого суммарного, или эффективного, коэффициента диффузии. Эффективный коэффициент поперечного распространения примеси зависит от извилистости русла реки [1, 7]. В [7] получена формула такого эффективного коэффициента для расчета поперечного распространения пассивной примеси в водотоках с большой шириной русла ($b = B/H > 25-30$):

$$D_{Э2} = 3,65 \cdot 10^{-3} U \cdot H \cdot \sqrt{b}. \quad (8)$$

С уменьшением величины b значение эффективного коэффициента $D_{Э2}$, рассчитанного по формуле (8), может оказаться ниже значения, рассчитанного по формуле (7). Что не имеет физического смысла, так как эффективный коэффициент не может быть меньше коэффициента турбулентной диффузии. Можно предложить при уменьшении b рассчитывать значение коэффициента D по формуле (8) до тех пор, пока указанное значение не уменьшится до величины $D_{Э1}$ по (7) при соответствующих условиях. При дальнейшем уменьшении b считаем, что D от b не зависит.

Результаты расчета

Краевая задача (3)-(4) в общем случае не имеет аналитического решения из-за зависимости потока примеси на береговой линии ($f_1(x)$ и $f_2(x)$) от продольной координаты. Задача решалась численным методом в среде Mathcad с помощью операторов Given-Pdesolve. Были заданы следующие параметры расчета: $U = 0,2$ м/с; $H = 2$ м; $B = 50$ м; $n = 0,03$; $c_{\phi} = 0,001$; $f_1(x) = -4$; $f_2(x) = 0$. Последнее условие означает, что диффузные источники загрязнений в правобережной части рассматриваемого участка отсутствуют.

На рис. 1 представлены результаты расчета поперечных профилей концентрации примеси при использовании различных формул для коэффициента поперечного рассеивания. Видно, что расчет D по рекомендуемой в [9] формуле (5) существенно занижает величину c по сравнению с экспериментальными значениями. При $x = 200$ (рис. 1,б) расчет по (5) предсказывает загрязнение ниже ПДК, тогда как в действительности превышение ПДК у берега более чем в полтора раза. Дальнейшие расчеты выполнены с использованием формулы (8).

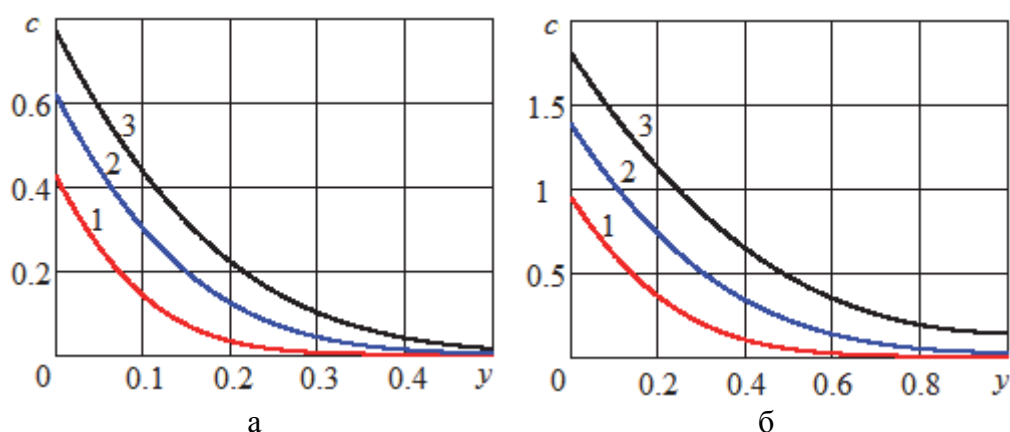


Рис. 1. Поперечные профили безразмерной концентрации примеси:
 а – в створе водотока $x = 40$; б – в створе $x = 200$;
 1 – расчет D по формуле (5); 2 – по формуле (7); 3 – по формуле (8)
 Fig. 1. Transverse profiles of the dimensionless concentration of impurities:
 а – the alignment of the watercourse $x = 40$; б – in the range $x = 200$;
 1 – calculation of D according to (5); 2 – by formula (7); 3 – by formula (8)

На рис. 2 показана эволюция поперечных профилей безразмерной концентрации примеси. Видно (рис. 2,б), как у левого берега расширяется область с загрязнением, превышающим ПДК.

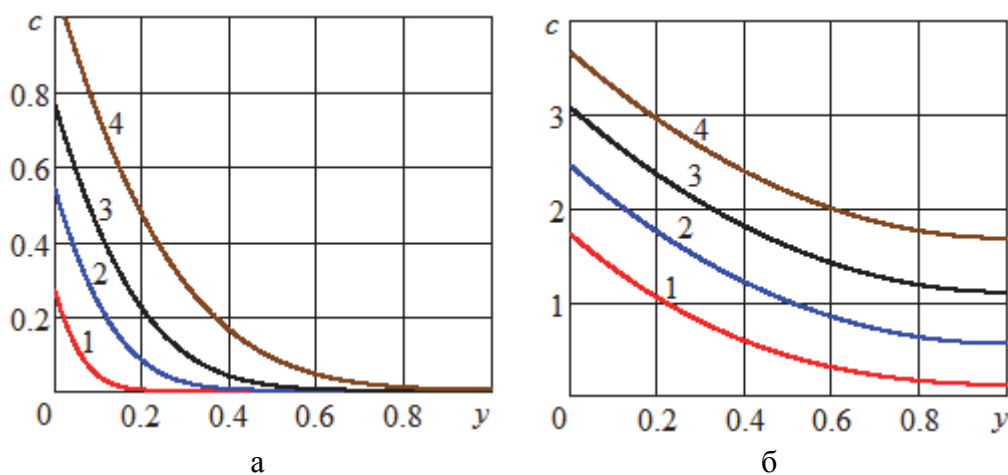


Рис. 2. Поперечные профили безразмерной концентрации примеси:
 а – в ближней области: 1 – $x = 5$; 2 – $x = 20$; 3 – $x = 40$; 4 – $x = 80$;
 б – в дальней области: 1 – $x = 200$; 2 – $x = 400$; 3 – $x = 600$; 4 – $x = 800$
 Fig. 2. Transverse profiles of the dimensionless concentration of impurities:
 а – in the near-field region: 1 – $x = 5$; 2 – $x = 20$; 3 – $x = 40$; 4 – $x = 80$;
 б – in the far field: 1 – $x = 200$; 2 – $x = 400$; 3 – $x = 600$; 4 – $x = 800$

На рис. 3 представлены результаты расчета поперечных профилей концентрации примеси, когда диффузные источники загрязнения есть на обоих берегах реки (при граничных условиях $f_1(x) = -4$; $f_2(x) = 2$).

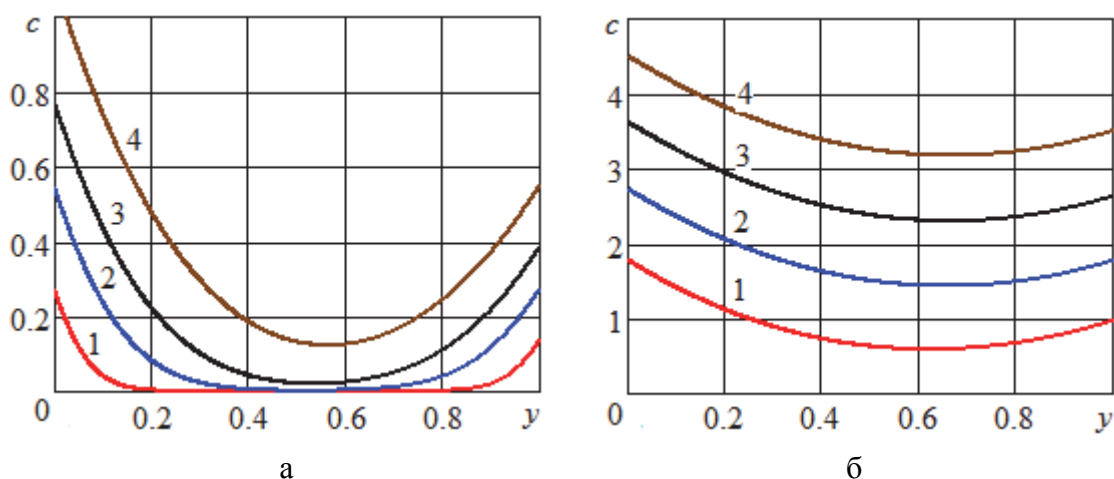


Рис. 3. Поперечные профили безразмерной концентрации примеси (добавлены правобережные диффузные источники загрязнения):
 а – в ближней области: 1 – $x = 5$; 2 – $x = 20$; 3 – $x = 40$; 4 – $x = 80$;
 б – в дальней области: 1 – $x = 200$; 2 – $x = 400$; 3 – $x = 600$; 4 – $x = 800$
 Fig. 3. Transverse profiles of the dimensionless concentration of impurities (added diffuse sources of pollution from the right coast):
 а – in the near-field region: 1 – $x = 5$; 2 – $x = 20$; 3 – $x = 40$; 4 – $x = 80$;
 б – in the far field: 1 – $x = 200$; 2 – $x = 400$; 3 – $x = 600$; 4 – $x = 800$

Заключение

Предложенная математическая модель позволяет рассчитывать профили концентрации примеси при различной интенсивности диффузных источников как на одном, так и на обоих берегах реки. С помощью этих данных можно определить степень превышения ПДК и оценить влияние загрязнения на экосистему водотока.

Установлено, что использование рекомендуемой методическими указаниями [9] формулы для коэффициента поперечной турбулентной диффузии приводит к существенному занижению расчетных значений загрязнения водотока.

Работа была выполнена при подготовке заявки № 17-08-00086 в Российский фонд фундаментальных исследований.

Список литературы

1. Beltaos S. Transverse mixing in natural streams // Canadian Journal of Civil Engineering. – 1979. – Vol. 6 (4). – P. 575–591.
2. Дружинин, Н.И. Математическое моделирование и прогнозирование загрязнения поверхностных вод суши / Н.И. Дружинин, А.И. Шишкин. – Л.: Гидрометеиздат, 1989. – 390 с.
3. Sharpley N. A., Smith S. J., Jones O. R., et al. The transport of bioavailable phosphorus in agricultural runoff // Journal Environ. Quality. – 1992. – Vol. 21. – P. 30–35.
4. Виноградов, Ю.Б. Математическая модель «Сток – эрозия – загрязнение» / Ю.Б. Виноградов // Метеорология и гидрология. – 1998. – № 5. – С. 87–96.
5. Михайлов, С.А. Диффузное загрязнение водных экосистем. Методы оценки и математические модели / С.А. Михайлов. – Барнаул: Изд-во «День», 2000. – 130 с.
6. Великанов, Н.Л. Расчет распространения загрязнения в реке Товарная / Н.Л. Великанов, В.А. Наумов, М.Н. Великанова // Вода: химия и экология. – 2011. – № 8. – С. 89–94.
7. Волынов, М.А. Влияние плановой геометрии речного русла на диффузию и дисперсию примеси / М.А. Волынов // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 6. – С. 535–540.

8. Великанов, Н.Л. Взвешенные частицы в водотоке и их осаждение / Н.Л. Великанов, В.А. Наумов // Вода: химия, экология. – 2014. – № 2. – С. 114–119.

9. Методика разработки нормативов допустимых сбросов веществ и микроорганизмов в водные объекты для водопользователей. Утверждена Министерством природных ресурсов Российской Федерации, приказ № 333 от 17 декабря 2007 г.

Сведения об авторе: Наумов Владимир Аркадьевич, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой, e-mail: van-old@mail.ru.