УДК 681.883

П.А. Стародубцев[1], А.П. Шевченко[1], Е.Н. Бакланов[2]
[1]Тихоокеанское высшее военно-морское училище им. С.О. Макарова,
690006, г. Владивосток, Днепровский переулок, 6
[2]Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет,
690087, г. Владивосток, ул. Луговая, 52б

ВЕЙВЛЕТЫ И НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РАССУЖДЕНИЯ ОБ ИХ ТЕОРЕТИЧЕСКОМ СОДЕРЖАНИИ

Рассмотрены история и современная практика применения вейвлет-преобразования для исследования сигналов с учетом особенностей применения его как функции и как алгоритма.
***Ключевые слова**: вейвлет, базисная функция, импульсная функция, преобразование Фурье, функции Дирака.*

P.A. Starodubtcev, A.P. Shevchenko, E.N. Baklanov
WAVELETS AND SOME ANALYTICAL CONSIDERATIONS ABOUT THEIR THEORETICAL CONTENT

The history and current practice of applying the wavelet transform to study signals, allowing for the use of it as a function and as an algorithm.
***Key words**: wavelet, basis function, impulse function, Fourier transform, Dirac function.*

Введение

Рассматривая функцию как математическое понятие, отражающее связь между элементами «множеств», а преобразование – как «множество в себе», рассмотрим корреляционную связь между ними в рамках термина «вейвлет» (англ. *wavelet – всплеск*).

Самое первое упоминание о «вейвлетах» как базисных функциях или подобных функциях было сделано в 1909 г. в диссертационной работе *Альберта Хаара* – венгерского математика. Работа была проведена под руководством *Давида Гильберта* и связана с поиском базиса в пространстве непрерывных функций [1].

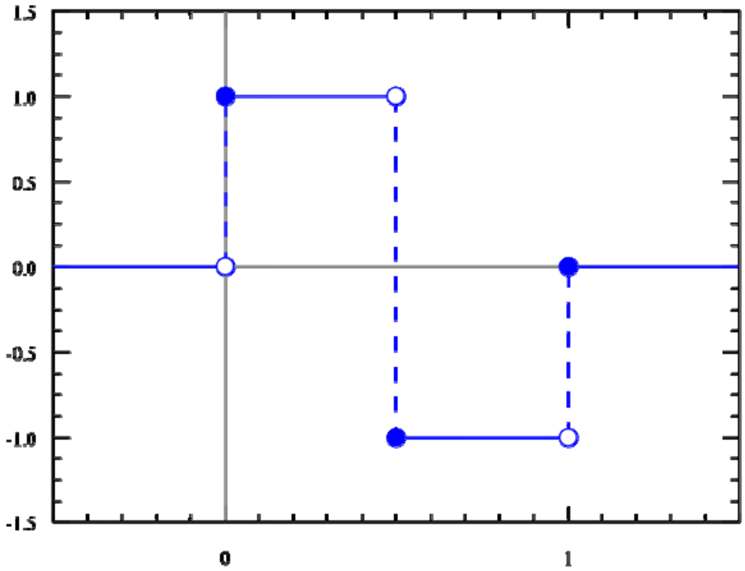
В дальнейшем эта базисная функция при проведении научных исследований была названа «вейвлетом» *Альберта Хаара* (рисунок) [1].

Как видно из рисунка, «вейвлет», или базисная функция *Альберта Хаара*, представляет собой короткое прямоугольное колебание на интервале ±1,0. Он *ортогонален*, обладает компактным носителем, хорошо локализован в пространстве, но не является гладким.

В процессе применения данной базисной функции для исследования сигналов и физических явлений было отмечено много противоположных мнений, как положительных, так и отрицательных.

Физик *Paul Levy,* исследуя броуновское движение, обнаружил, что базис *Альберта Хаара* лучше, чем преобразование Фурье для изучения данного движения. Но другими исследователями было замечено, что данная базисная функция интересна только теоретически, не является дифференцируемой функцией и имеет длинные «хвосты» в частотной области как функция, представляющая собой обычный прямоугольный импульс [2].

Упоминание о «вейвлетах» как термине или как преобразовании было обнаружено в научных трудах *J.Morlet* и *A. Grossman.* Они изучали сейсмические сигналы с помощью разработанной ими же базисной функции, которую впоследствии они же и назвали «вейвлетом» [1, 2].



Вейвлет Альберта Хаара
Wavelet of Albert Haar

Основы широко используемого в современной практике экспериментальных исследований сигналов и физических явлений непрерывного вейвлет-преобразования (англ. *continuous wavelet transform, CWT*) разработали *Гуппилауд, Гроссман и Морле* [1, 2].

Ингрид Добеши (фр. Ingrid Daubechies, математик из США) обосновала ортогональные вейвлеты. *Натали Делпрат* создала в 1991 г. временно-частотную интерпретацию «*CWT*». Математическая формализация в работах *Mallat* и *Meyer* привела к созданию теоретических основ вейвлет-анализа, названного мультиразрешающим (кратномасштабным) анализом, или математическим микроскопом [1, 2].

Основная часть

По мнению авторов, достаточно интересным может быть объяснение частотно-временного положения вейвлета среди огромного количества базисных функций. В связи с чем для вейвлета как функции, или как преобразования, требуется отдельное пояснение его связи с понятием «гармоническая базисная функция» и «импульсная базисная функция». И этот факт нельзя обойти вниманием, потому что это связано с преобразованиями Жан Батиста Жозефа Фурье и импульсными базисными функциями типа импульсов Леопольда Кронекера.

Гармонические базисные функции преобразования Фурье синусоидального и косинусоидального представления предельно локализованы в частотной области, вплоть до импульсных функций Поля Адриена Мориса Дирака – английского физика-теоретика (при $T \to \infty$), и не локализованы во временной области [3], т.е. определены во всем временном интервале от $-\infty$ до $+\infty$.

Противоположностью данным «гармоническим базисным функциям» являются «импульсные базисные функции» типа импульсов Кронекера, которые локализованы во временной области и размыты по всему частотному диапазону. Между ними существует теоретическое пространство с частотно-временной локализацией, которую, по мнению авторов, и занимают современные «вейвлеты» (таблица).

В основу вейвлетного базиса положено пространство $L^2(R)$, $R(-\infty, +\infty)$, где применяются стремящиеся к нулю финитные функции из одного состояния.

В основе вейвлета лежит анализирующая функция $\Psi(t)$, равная нулю за пределами конечного интервала и имеющая нулевое среднее значение по интервалу определения. Последнее необходимо для задания локализации спектра вейвлета в частотной области.

Базисные функции
Basic functions

№ п/п	Вид базисной функции	Локализована функция	Не локализована (размыта) функция	Примечание
1	2	3	4	5
1	Гармоническая функция преобразования Фурье до импульсных функций Дирака (начало ряда базисных функций)	В частотной области (до импульсных функций Дирака $T \to \infty$)	Во временной области, т.е. определены во всем временном интервале от $-\infty$ до $+\infty$	-
2	Вейвлеты (середина ряда базисных функций)	В частотной и временной областях	-	Локализация ограничена функцией неопределенности. Для учета особенностей локализации можно использовать семейства функций
3	Импульсные базисные функции типа импульсов Кронекера (конец ряда базисных функций)	Предельно локализованы во временной области	Не локализованы (размыты) по всему частотному диапазону	-

$$ПР - Фурье - Функции - Дирака \Leftrightarrow Вейвлеты \Leftrightarrow Импульсы - Кронекера^{*}$$

* Частотно-временная взаимосвязь базисных функций и пространственное положение вейвлетов.

Конструируемый базис в пространстве $L^2(R)$ с помощью масштабных преобразований формируется путем учета [4]:

• частотной независимой переменной в спектральном представлении во временной области – $\Psi(t) \Rightarrow \Psi(a^m t)$, где $a = const$, $m = 0, 1, \ldots M$, чем обеспечивается самоподобие анализирующей функции $\Psi(t)$;

• дополнительной независимой переменной последовательных сдвигов функции $\Psi(t)$ вдоль оси, типа $\Psi(t) = \Psi(t + k)$ для перекрытия всей оси пространства $R(-\infty, +\infty)$.

Исходя из этого, вид базисной функции имеет следующий вид: $\Psi(t) \Rightarrow \Psi(a^m t + k)$, где m, k – целочисленные значения.

Заключение

Таким образом, «вейвлет» нужно рассматривать в двух аспектах: как функцию и как преобразование (или алгоритм). Оба эти аспекта имеют свои особенности и взаимно зависят друг от друга. Функция ведет себя как исходный статус и полностью определяет правильность или неправильность всех последующих решений. Поэтому вейвлет и занимает положение между Фурье-функциями Дирака и импульсами Кронекера.

Вейвлет как преобразование (или алгоритм) определяет всю дальнейшую алгоритмизацию вычислительного процесса и правильность выбранного статуса самой функции как базисной, и он дает [5]:

• частотную характеристику или *распределение энергии сигнала по частотным составляющим* (данное состояние можно классифицировать как энергетический спектр сигнала);

• сведения о локальных координатах, где проявляются группы частотных составляющих или на которых происходят быстрые изменения частотных составляющих сигналов;

• значения сигналов на различных уровнях декомпозиции (разложения) функции на аппроксимирующую (грубую) с достаточно медленной временной динамикой изменений и на детализирующую с локальной и быстрой динамикой изменения, с последующим их дроблением и детализацией на других уровнях декомпозиции сигналов. Последнее возможно как во временной, так и в частотной областях представления сигналов вейвлетами.

Из такого краткого анализа, представленного выше, необходимо отметить, что теория вейвлетов не является фундаментальной физической теорией, но она дает удобный и эффективный инструментарий для решения многих практических задач (в данном случае линейных задач или экстремальных задач на множествах n-мерного векторного пространства, задаваемых системами линейных уравнений и неравенств).

Семейства вейвлетов во временной и частотной областях используются для представления сигналов и функций в виде суперпозиций вейвлетов на разных масштабных уровнях декомпозиции (разложения) сигналов.

Нельзя вейвлет-методы рассматривать как новую универсальную технологию. Их развитие не приведет к полной замене традиционных средств обработки и анализа информации. Вейвлеты позволяют только расширить инструментальную базу информационных технологий обработки данных.

Но надо всегда помнить:

• вейвлет-преобразование есть преобразование, похожее на преобразование Фурье (или гораздо больше на оконное преобразование Фурье) с совершенно иной оценочной функцией. Основное различие лежит в следующем: преобразование Фурье раскладывает сигнал на составляющие в виде синусов и косинусов, т.е. функций, локализованных в Фурье-пространстве; напротив, вейвлет-преобразование использует функции, локализованные как в реальном, так и в Фурье-пространстве;

• вейвлет-преобразование на самом деле является бесконечным множеством различных преобразований в зависимости от оценочной функции, использованной для его расчёта. Это является основной причиной, почему термин «вейвлет-преобразование» используется в весьма различных ситуациях и применениях.

Список литературы

1. Новиков, Л.В. Основы вейвлет-анализа сигналов / Л.В. Новиков. – СПб.: ИАНП РАН, 1999. – 152 с.

2. Яковлев, А.Н. Введение в вейвлет-преобразования / А.Н. Яковлев. – Новосибирск: Новосиб. гос. техн. ун-т, 2003. – 104 с.

3. Хамухин, А.А. Математическая модель ячейки однородной структуры для вычисления непрерывного вейвлет-преобразования / А.А. Хамухин // Проблемы информатики. – 2011. – № 5. – С. 87–93.

4. Переберин, А.В. О систематизации вейвлет-преобразований / А.В. Переберин // Вычислительные методы и программирование. – 2002. – Т. 2. – С. 15–40.

5. Сонечкин, Д.М. Оценка тренда глобального потепления с помощью вейвлетного анализа / Д.М. Сонечкин, Н.М. Даценко, Н.Н. Иващенко // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. – 1997. – Т. 33, № 2. – С. 184–194.

***Сведения об авторах*:** Стародубцев Павел Анатольевич, доктор технических наук, профессор, e-mail: spa1958@mail.ru;

Шевченко Александр Петрович, e-mail: vunc-vmf-tovmi@mil.ru;

Бакланов Евгений Николаевич, доцент, e-mail: baklanoven@mail.ru.