УДК 551.463.21

С.В. Шостак[1], П.А. Стародубцев[2], Е.Н. Бакланов[3], А.П. Шевченко[2]
[1]Дальневосточный федеральный университет,
690600, г. Владивосток, о. Русский, кампус ДВФУ, корпус А
[2]Тихоокеанское высшее военно-морское училище имени С.О. Макарова,
690006, г. Владивосток, Днепровский переулок, 6
[3]Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет,
690087, г. Владивосток, ул. Луговая, 52б

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФОРМЫ СИГНАЛА

Рассматривается задача выделения сигнала с конкретным набором значений и параметров на фоне помех и других сигналов при помощи многомерной линейной фильтрации. Распространяющиеся в пространстве акустические сигналы представлены в виде пространственно-временных функций, обработка которых производится методами многомерного Фурье-анализа.

***Ключевые слова**: многомерная фильтрация, преобразование Фурье, акустическая волна, антенная решетка, пространственно-временной спектр сигнала.*

S.V. Shostak, P.A. Starodubtcev, E.N. Baklanov, A.P. Shevchenko

ELEMENTS OF THE THEORY OF LINEAR SYSTEMS IN THE PROBLEM OF RECONSTRUCTING THE WAVEFORM

The paper considers the problem of extracting a signal with a specific set of values and parameters from noise and other signals using multivariate linear filtering. Propagating in space acoustic signals are represented as space-time functions, processing of which is produced by methods of multidimensional Fourier analysis.

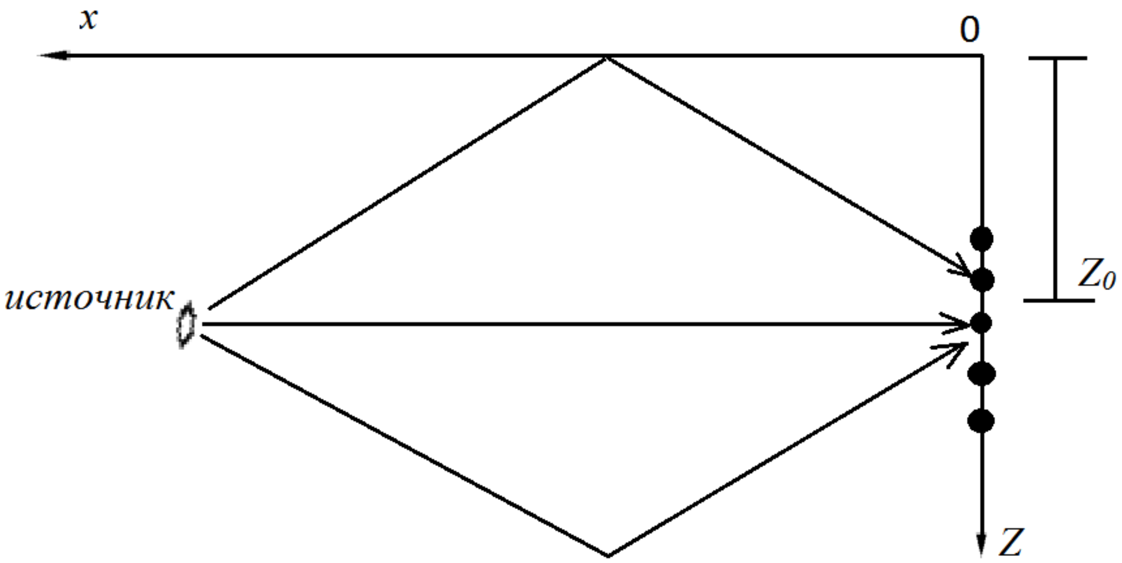
***Key words:** multidimensional filtering, Fourier transform, acoustic wave, antenna array, spatio-temporal spectrum of signal.*

Как правило, обработка сигналов, передаваемых с помощью распространяющихся волн, ставит своей целью выделение сигнала на фоне шума, помех или других сигналов. Поэтому данную задачу можно интерпретировать как локализацию энергии сигнала по времени, по частоте, направлению распространения или какой-то другой переменной. Задача обработки включает в себя приём и анализ распространяющихся сигналов с помощью как пассивных, так и активных систем.

Пассивная система принимает сигналы, распространяющиеся от удалённого источника, и затем анализирует их. В противоположность ему активная система сама излучает акустические волны, которые можно фокусировать в определённом направлении в виде луча. Это излучение отражается объектами (фактически разрывами непрерывности среды распространения) и возвращается к приёмнику, где оно анализируется. Многомерную фильтрацию можно применять для извлечения информации из сигнала, передаваемого с помощью распространяющихся пространственных волн, так как она даёт методологию выделения сигналов с конкретным набором значений параметров. Можно также использовать многомерный спектральный анализ применительно к задачам выделения сигналов. Измерение многомерного спектра позволяет выделять компоненты сигнала в различных частотных диапазонах и оценивать их интенсивность [1, 2]. Распространяющиеся в пространстве волны и сигналы, которые они переносят, можно представить в виде пространственно-временных функций, поэтому их анализ может производиться методами многомерного Фурье-анализа [1, 2].

Рассмотрим применение методов многомерной линейной фильтрации к задачам представления сигнала на различных дальностях и глубинах относительно приёмной антенны.

Основная задача моделирования условий распространения сигнала, как правило, заключается в вычислении потерь на распространение волн, создаваемых гармоническим точечным источником [3, 4, 7]. Между тем при решении задач обработки сигналов нередко возникает необходимость восстановления формы сигнала (не обязательно гармонического) в зависимости от глубины и дальности от приёмной антенны. Идеализированная геометрическая постановка этой задачи представлена на рисунке.



Пример распространения акустического сигнала
Example of acoustic signal propagation

Переменная x задаёт дальность от приёмной антенной решётки, а величина Z_0 определяет глубину положения антенны. Предполагается, что гидроакустическая волна $p(x,z,t)$ распространяется от источника с постоянной во всех точках скоростью c. Её распространение описывается двумерным гиперболическим волновым уравнением [3, 4]

$$\frac{\partial^2 p(x,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(x,z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p(x,z,t)}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$

где t – координата времени; z – глубина.

Антенная решётка измеряет значения $p(x,z,t)$ в точке с координатами $x = 0$, $z = z_0$, что даёт граничные условия для дифференциального уравнения в частных производных $p(0, z_0, t)$.

Нашей задачей является определение функции $p(x,z,t)$, т.е. профиля волны, на дальностях x и глубинах z. Эту задачу можно отнести к области обратных задач. Определим двумерные преобразования Фурье волнового поля на расстоянии x следующим способом [2, 5]:

$$P(x,k_z,f) = \int\int_{-\infty}^{\infty} p(x,z,t) \exp\left[-j(2\pi ft - k_z z)\right] dt dz, \qquad (2)$$

$$P(x,z,t)=\iint_{-\infty}^{\infty}P(x,k_z,f)\exp\left[-j(2\pi ft-k_z z)\right]dfdk_z\,, \tag{3}$$

где k_z – волновой вектор, который представляет собой пространственную частоту, показывает количество волн, укладывающихся в единичной длине координаты z; f – временная частота; $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Произведём преобразование Фурье обеих частей волнового уравнения (1), учитывая его следующие свойства:

$$\frac{\partial^2 p(x,z,t)}{\partial z^2}=\iint_{-\infty}^{\infty}(-jk_z)^2 P(x,k_z,f)\exp\left[j(2\pi f-k_z z)\right]dfdk_z\,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 p(x,z,t)}{\partial z^2}=\iint_{-\infty}^{\infty}(j2\pi f)^2 P(x,k_z,f)\exp\left[j(2\pi f-k_z z)\right]dfdk_z\,. \tag{5}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 p(x,k_z,t)}{\partial x^2}+(-jk_z)^2\cdot P(x,k_z,f)-\frac{1}{c^2}(j2\pi f)^2\cdot P(x,k_z,f)=\\ &=\frac{\partial^2 P(x,k_z,f)}{\partial x^2}-k_z{}^2 P(x,k_z,f)+\frac{(2\pi f)^2}{c^2}P(x,k_z,f)=\\ &=\frac{\partial^2 p(x,k_z,f)}{\partial x^2}+\left(\frac{(2\pi f)^2}{c^2}-k_z{}^2\right)\cdot P(x,k_z,f)=0\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Полученное уравнение является обычным дифференциальным уравнением второго порядка по переменной x с характеристическим уравнением вида

$$r^2+\left[\frac{(2\pi f)^2}{c^2}-k_z{}^2\right]=0\,, \tag{7}$$

корнями которого будут

$$r_{12}=\pm j\sqrt{\frac{(2\pi f)^2}{c^2}-k_z{}^2}\,. \tag{8}$$

Тогда общее решение уравнения (6) можно записать в виде

$$P(x,k_z,f)=A\cdot\exp\left(-jx\sqrt{\frac{(2\pi f)^2}{c^2}-k_z{}^2}\right)+B\cdot\exp\left(jx\sqrt{\frac{(2\pi f)^2}{c^2}-k_z{}^2}\right). \tag{9}$$

Положительная экспонента соответствует волне, которая распространяется вправо, а отрицательная – волне, распространяющейся влево. Поскольку предполагается, что нас интересует волна, распространяющаяся влево, можно положить $B = 0$. В результате (9) преобразуется к виду

$$P(x,k_z,f) = A\cdot\exp\left(-jx\sqrt{\frac{(2\pi f)^2}{c^2}-k_z{}^2}\right). \quad (10)$$

Далее произведём двумерное преобразование Фурье по t и z принятого сигнала на антенной решётке $p(0,z,t)$ и получим

$$P(0,k_z,f) = \int\int_{-\infty}^{\infty} p(0,z,t)\exp[-j(2\pi ft - k_z z)]dtdz\,. \quad (11)$$

Отсюда видно, что теперь граничные условия имеют вид $P(0,k_z,f)$. И тогда

$$P(x,k_z,f)|_{x=0} = A = P(0,k_z,f)\,. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10), получим окончательное выражение для волнового поля

$$P(x,k_z,f) = P(0,k_z,f)\cdot\exp\left[-jx\sqrt{\frac{(2\pi f)^2}{c^2}-k_z{}^2}\right]. \quad (13)$$

Определим некоторый интервал экстраполяции Δx. С учётом Δx выражение (13) можно переписать в виде

$$P(x+\Delta x,k_z,f) = P(x,k_z,f)\cdot\exp\left[-j\Delta x\sqrt{\frac{(2\pi f)^2}{c^2}-k_z{}^2}\right]. \quad (14)$$

Обозначим

$$H(k_z,f) = \exp\left[-j\Delta x\sqrt{\frac{(2\pi f)^2}{c^2}-k_z{}^2}\right]. \quad (15)$$

Учитывая (15), выражение (14) запишется в следующем виде:

$$P(x+\Delta x,k_z,f) = P(x,k_z,f)\,. \quad (16)$$

Выражение (16) представляет собой хорошо известное соотношение фильтрации в частотной области [1,6], когда некоторый сигнал, представленный $P(x,k_z,f)$, фильтруется фильтром с частотной характеристикой $H(k_z,f)$. При этом $H(k_z,f)$, как видно из (15), является линейным фазовым фильтром, инвариантным к сдвигу, и имеет смысл линейного оператора экстраполяции. Кроме того, как следует из выражений (13), (14) и (16), процедура расчётов имеет рекуррентный вид. В этом случае для вычислений на следующем шаге необходимо, если требуется, изменить величину Δx и скорость распространения звука c, которая может изменяться в зависимости от дальности и глубины.

Для перехода в пространственно-временную область в соответствии с (2) требуется выполнить обратное преобразование Фурье выражения (16), в результате получим

$$p(x+\Delta x,z,t)=\int\int_{-\infty}^{\infty}P(x,k_z,f)\cdot H(k_z,f)\exp[j(2\pi ft-k_z z)]dfdk_z\,. \qquad (17)$$

Рассмотрим теперь случай, когда скорость звука изменяется с расстоянием и глубиной.

Снова обратимся к граничным условиям, когда *x=0*. Будем считать, что на антенную решётку под углом θ приходит плоская волна. В этом случае сигнал *p(0,z,t)* будет иметь вид

$$p(0,z,t)=p(t-\frac{z}{c}\sin\theta\,, \qquad (18)$$

где θ – угол между нормалью к решётке и фронтом волны.

Тогда двумерное преобразование такого сигнала имеет следующее выражение:

$$\begin{aligned}P(0,k_z,f)&=\int_0^L\int_0^T p(0,z,t)\cdot\exp[-j(2\pi ft-k_z z)]dtdz=\\&=\int_0^L\int_0^T p\left(t-\frac{z}{c_0}\sin\theta\right)\cdot\exp[-j(2\pi ft-k_z z)]dtdz,\end{aligned} \qquad (19)$$

где L – размеры апертуры антенны; T – длительность сигнала; c_0 – скорость звука при $x = 0$, z_0.

Произведём в выражении (18) замену переменной $\tau=t-\dfrac{z}{c_0}\sin\theta$, $t=\tau+\dfrac{z}{c_0}\sin\theta$, $dt = d\tau$, подставим в (18) и получим

$$\begin{aligned}P(0,k_z,f)&=\int_0^L\int_{\left(-\frac{z}{c_0}\sin\theta\right)}^{\left(T-\frac{z}{c_0}\sin\theta\right)}p(\tau)\cdot\exp\left\{-j\left[2\pi f\left(\tau+\frac{z}{c_0}\sin\theta\right)-k_z z\right]\right\}d\tau dz=\\&=\int_{\left(-\frac{z}{c}\sin\theta\right)}^{\left(T-\frac{z}{c}\sin\theta\right)}p(\tau)\cdot\exp(-j2\pi f\tau)d\tau\cdot\int_0^L\exp\left[-j\left(\frac{2\pi f}{c_0}\sin\theta-k_z\right)z\right]dz=\\&=P(f)\cdot\frac{\sin\left[0{,}5L\left(\dfrac{2\pi f}{c_0}\sin\theta-k_z\right)\right]}{0{,}5\left(\dfrac{2\pi f}{c_0}\sin\theta-k_z\right)}\cdot\exp\left[-j0{,}5L\left(\frac{2\pi f}{c_0}\sin\theta-k_z\right)\right]\end{aligned} \qquad (20)$$

где $P(f)=\int_{\left(-\frac{z}{c}\sin\theta\right)}^{\left(T-\frac{z}{c}\sin\theta\right)}p(\tau)\exp(-j2\pi f\tau)d\tau$ – временный спектр принятого сигнала.

Окончательно

$$P(0,k_z,f)=P(f)\cdot\frac{\sin\left[0{,}5L\left(\dfrac{2\pi f}{c_0}\sin\theta-k_z\right)\right]}{0{,}5\left(\dfrac{2\pi f}{c_0}\sin\theta-k_z\right)}\cdot\exp\left[-j0{,}5L\left(\frac{2\pi f}{c_0}\sin\theta-k_z\right)\right]. \qquad (21)$$

Положим теперь, что на расстоянии Δx от антенной решётки и на глубине z скорость звука имеет значение c_1. В этом случае выражение (15) для экстраполирующего фильтра примет следующий вид:

$$H(k_z,f)=\exp\left(-j\Delta x\sqrt{\frac{(2\pi f)^2}{c_1{}^2}-k_z{}^2}\right). \tag{22}$$

И тогда согласно формуле (13) на расстоянии Δx и на глубине z, на которой скорость звука имеет величину c_1, окончательно получим выражение для пространственно-временного спектра сигнала:

$$P(\Delta x,k_z,f)=P(0,k_z,f)\cdot H(k_z,f)=P(0,k_z,f)\cdot\exp\left(-j\Delta x\sqrt{\frac{(2\pi f)^2}{c_1{}^2}-k_z{}^2}\right)=$$

$$=P(f)\cdot\frac{\sin\left[0{,}5L\left(\frac{2\pi f}{c_0}\sin\theta-k_z\right)\right]}{0{,}5\left(\frac{2\pi f}{c_0}\sin\theta-k_z\right)}\cdot\exp\left[-j0{,}5L\left(\sqrt{\frac{2\pi f}{c_0}\sin\theta-k_z}\right)\right]\times \tag{23}$$

$$\times\exp\left(-j\Delta x\sqrt{\frac{(2\pi f)^2}{c_1{}^2}-k_z{}^2}\right).$$

Для получения сигнала в пространственно-временной области теперь необходимо выполнить обратное преобразование Фурье в соответствии с выражением (2):

$$p(x,z,t)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}P(\Delta x,k_z,f)\cdot\exp[j(2\pi ft-kz)]dfdz=$$

$$=\int_0^{f_b}\int_0^{k_{zb}}P(f)\cdot\frac{\sin\left[0{,}5L\left(\frac{2\pi f}{c_0}\sin\theta-k_z\right)\right]}{0{,}5\left(\frac{2\pi f}{c_0}\sin\theta-k_z\right)}\times \tag{24}$$

$$\times\exp\left[-j0{,}5L\left(\frac{2\pi f}{c_0}\sin\theta-k_z+\frac{2\Delta x}{L}\sqrt{\frac{(2\pi f)^2}{c_1{}^2}-k_z{}^2}\right)\right]dfdz\,,$$

где f_b – верхняя временная частота; k_{zb} – верхнее волновое число по координате z.

Список литературы

1. Даджион, Д. Цифровая обработка многомерных сигналов / Д. Даджион, Р. Мерсеро. − М.: Мир, 1988.

2. Гусев, В.Г. Системы пространственно-временной обработки гидроакустической информации / В.Г. Гусев. − Л.: Судостроение, 1988.

3. Бреховских, Л.М. Теоретические основы акустики океана / Л.М. Бреховских, Ю.П. Лысанов. − Л.: Гидрометеоиздат, 1982.

4. Распространение волн и подводная акустика / под ред. Дж. Б. Келлера, Дж.С. Пападакиса. − М.: Мир, 1980.

5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. − М.: Наука, 1987.

6. Бендат, Дж. Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол. − М.: Мир, 1989.

7. Бакланов, Е.Н. Некоторые акустические особенности морских биологических объектов и их использование для обнаружения / Е.Н. Бакланов, М.В. Мироненко, П.А. Стародубцев // Науч. тр. Дальрыбвтуза. − Владивосток: Дальрыбвтуз, 2014. − Т. 32. − С. 32−41.

8. Карасев, В.В. Процесс формирования дальней зоны излучения и приема гидроакустических преобразователей рыбопоисковых систем при нелинейном взаимодействии гидроакустических сигналов / В.В. Карасев, П.А. Стародубцев, С.В. Гуторова // Науч. тр. Дальрыбвтуза. − Владивосток: Дальрыбвтуз, 2009. − Т. 21. − С. 41−48.

Сведения об авторах:
Шостак Сергей Васильевич, кандидат технических наук, доцент, e-mail: servash@mail.ru;
Стародубцев Павел Анатольевич, доктор технических наук, профессор,
e-mail: spa1958@mail.ru;
Бакланов Евгений Николаевич, доцент, e-mail: baklanoven@mail.ru;
Шевченко Александр Петрович, e-mail: vunc-vmf-tovmi@mil.ru.