

УДК 378.147.026.7 : 621.3 : 004

**В.Я. Молочков, И.Д. Молочкова**

Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет,  
690087, г. Владивосток, Луговая, 52б

## **СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ИССЛЕДОВАНИИ ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ СУДОВ**

*Приводится методика и математический аппарат исследования функционирования и устойчивости работы технических средств судов на основе моделирования их работы на ЭВМ, решение задач построения оптимальных систем регулирования технических средств судов.*

**Ключевые слова:** моделирование, суда, технические средства, оптимизация.

**V.Ya. Molochkov, I.D. Molochkova**

## **STRUCTURAL MODELS OF DYNAMIC PROCESSES IN RESEARCH SHIP'S TECHNICAL GEARS**

*In article is resulted the technique and mathematical apparatus for research the functionality and the stability ships technical systems on the basis of modeling their work on the computer, the decision of construction problems for optimum regulation ship's systems.*

**Key words:** modeling, ships, means, optimization.

### **Введение**

Исследование на этапе проектирования или модернизации существующих технических средств судов требует применения структурных и алгоритмических моделей устройства, предназначенных для решения следующих задач:

1. Проверка на устойчивость подсистем регулирования.
2. Разработка интерфейсных схем связи с входными параметрами от датчиков и выходными – к исполнительным механизмам.
3. Разработка всех уровней программного обеспечения от драйверов отдельных устройств до внешней оболочки, обеспечивающей эффективную устойчивую работу устройств.

### **Этапы и методики анализа**

Разработку системы управления можно разделить на два этапа: *структурный и алгоритмический*.

Структурный этап связан с разработкой структуры системы и ее математической модели, с анализом ее функционирования и синтезом законов управления.

Алгоритмический этап связан с разработкой алгоритмов сбора и обработки информации в процессе работы системы управления.

*Разработка математической модели управления* связана с анализом и алгоритмизацией объекта управления, с созданием *процедурной модели*, которая описывает операционные действия, изменяющие состояние основного оборудования, и действия, поддерживающие значения основных параметров в нормальных и аварийных режимах.

В настоящее время для создания моделей управления объектами используются три вида математического описания:

- передаточные функции и частотные характеристики линеаризованных систем, разрешенные относительно выходных переменных системы;

- детализированные структурные схемы или направленные графы, позволяющие составить на основе физических законов, действующих в простейших частях схемы, поэлементное описание системы;

- математическое описание с использованием понятия “пространства состояний” в виде уравнений, разрешенных относительно первых производных переменных состояний. В настоящее время для этих целей широко используется язык векторно-матричных уравнений и аппарат линейной алгебры для многомерных систем произвольного порядка с многими входами и выходами.

*Для анализа функционирования технических средств судов предпочтительны следующие две методики.*

*Первая* заключается в нахождении дискретных передаточных функций разомкнутой и замкнутой систем, с помощью которых осуществляется исследование системы в целом. Она основана на использовании метода  $z$ -преобразования (дискретного преобразования Лапласа), логарифмических частотных характеристик и корневого годографа.

Расчет на ЭВМ позволяет осуществить переход от непрерывных систем, какими являются реальные устройства судовой автоматики к их дискретным аналогам.

Реальные системы, как правило, нелинейные полностью или на каком-то участке своего поведения. Применение ЭВМ позволяет использовать «вычислительный эксперимент» – сочетание аналитических методов с большими сериями вычислений на ЭВМ. «Вычислительный эксперимент» предназначен для изучения, прогнозирования, оптимизации сложных многопараметровых нелинейных процессов, теоретическое и экспериментальное исследование которых традиционными методами затруднено или невозможно.

Аналоговые входные и выходные сигналы преобразуются в дискретные величины с заданным шагом квантования.

Для устранения влияния дискретности  $z$ -преобразования при изучении поведения непрерывных компонентов системы применяется модифицированное  $z$ -преобразование.

*Вторая методика исследования* связана с использованием *метода пространства состояний*. Она позволяет решать задачи исследования различных систем, в том числе цифровых нелинейных. Кроме того, применение метода пространства состояний связано с использованием векторно-матричных обозначений, что не только упрощает математические выражения, но и позволяет автоматизировать процесс исследования рассматриваемых систем с помощью ЭВМ.

Процессы, исследуемые в судовом электроприводе и технологических процессах на судах, носят динамический характер и не на всем протяжении линейны. Реальные процессы заменяются их *структурными моделями* в целом системы или по частям с применением линеаризации и «замораживания».

*Структурные модели* включают динамические звенья данного устройства (гребная электрическая установка, траловая лебедка, комплекс агрегатов машинного отделения с их передаточными функциями).

### **Структурные модели в исследовании технических средств**

Необходимым условием использования структурных моделей является возможность разбиения технического средства на элементарные звенья с известными передаточными функциями.

*Структурные модели линейных систем (рис. 1) представляют в виде:*

- дифференциального уравнения  $n$ -го порядка;
- системы  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка в развернутой или матричной форме;

- передаточной функции, которую записывают в общем виде как описание соединений типовых передаточных функций элементарных звеньев.

Линейное дифференциальное уравнение записываем в виде

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i y(t) = \sum_{j=1}^m b_j p^j u(t), \quad (1)$$

где  $a_i$  и  $b_j$  – постоянные коэффициенты;  $p$  – символ дифференцирования;  $y(t)$  – выходная, а  $u(t)$  – входная переменные; для реальных систем  $m \leq n$ . Решение этого уравнения ищут для начальных условий

$$p^i y(0) = y_{i0}, \quad p^j u(t) = u_{j0}. \quad (2)$$

*Отношение преобразований Лапласа выходной переменной к входной при нулевых начальных условиях – передаточная функция:*

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j p^j}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}, \quad (3)$$

где  $p$  – оператор Лапласа.

При  $b_j = 0$  для всех  $j \neq 0$  и  $b_0 \neq 0$  передаточная функция

$$W(p) = \frac{b_0}{\sum_{i=0}^n a_i p^i}, \quad (4)$$

а дифференциальное уравнение записывается как

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i y(t) = b_0 u(t), \quad (5)$$

где  $p$  – символ дифференцирования.

Выходную переменную  $y(t)$  получаем путем последовательного интегрирования старшей производной  $p^n y(t)$ . Для этого потребуются  $n$  последовательно включенных интеграторов, сигналы на входах которых представляют собой производные  $y(t)$  от  $p^n y(t)$  до  $py(t)$ .

Запись дифференциального уравнения (5) в виде

$$p^n y(t) = \frac{1}{a_n} [-a_{n-1} p^{n-1} y(t) - \dots - a_1 p y(t) - a_0 y(t) + b_0 u(t)] \quad (6)$$

обнаруживает, что высшую производную  $p^n y(t)$  можно получить, умножив выходные переменные интеграторов на соответствующие коэффициенты от  $a_{n-1}$  до  $a_0$ , просуммировав результаты, вычтя эту сумму из переменной  $b_0 u(t)$  и умножив полученную таким образом переменную на коэффициент  $1 / a_n$  (рис. 1).

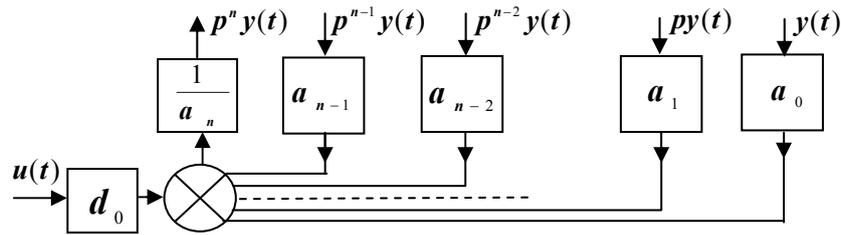


Рис. 1. Схема получения высшей производной  
Fig. 1. Scheme reception of the higher derivative

Структурная модель динамического процесса, описываемого дифференциальными уравнениями в виде (5) или (6), представлена на рис. 2.

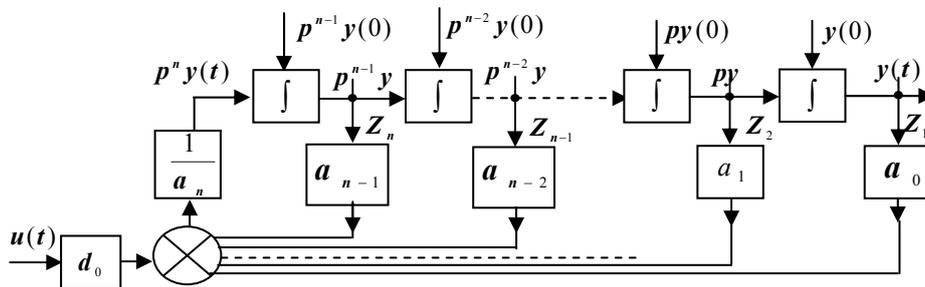


Рис. 2. Структурная модель динамического процесса  
Fig. 2. Structural model of dynamic process

Передающую функцию легко записать (1), если заменить обозначение интеграла в соответствующих блоках модели (см. рис. 2) оператором  $1/p$ , то по этой модели можно записать передающую функцию (4).

В ином виде можно представить динамический процесс, структура которого показана на рис. 3, используя аналитическую запись дифференциального уравнения  $n$ -го порядка (5) в виде системы  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка с подстановками  $y(t) = z_1(t)$ ;  $py(t) = z_2(t)$  и т.д. до  $p^{n-1}y(t) = z_n(t)$  с начальными условиями  $z_i(0) = y_{i0}$ , где  $\alpha_i = a_i/a_n$  и  $\beta_n = b_0/a_n$ .

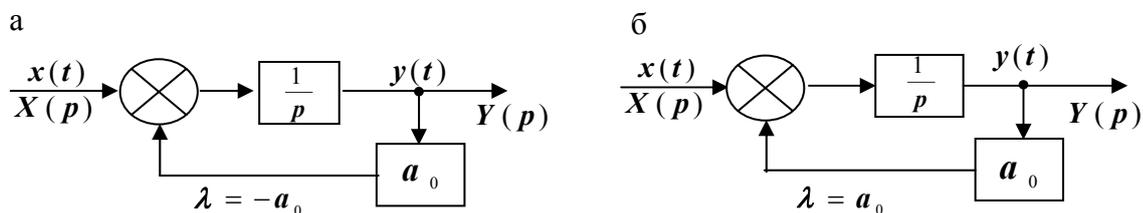


Рис. 3. Системы с отрицательной (а) и положительной обратной связью (б)  
Fig. 3. Systems with negative (a) and positive feedback (б)

Структурная математическая модель динамического процесса, показанная на рис. 2, обладает следующими преимуществами:

- во-первых, она дает наглядное представление понятию “состояние системы” как совокупности сигналов на выходах интеграторов;
- во-вторых, в явном виде представляет структуру связей между переменными в системе с обратной связью. В матричном виде структурная модель представлена на рис. 4.

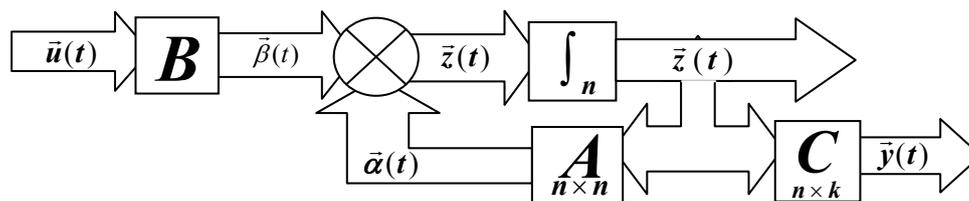


Рис. 4. Структурная модель в матричном исполнении  
 Fig. 4. Structural model in matrix execution

Последовательное  $n$ -кратное интегрирование представлено в ней  $n$ -мерным интегратором  $\int_n$ , преобразующим  $n$ -мерный вектор  $\bar{z}(t)$  в состояние системы  $\bar{z}(t)$ . Векторный сигнал  $\bar{z}(t)$  формируется  $n$ -мерным сумматором из двух компонент: вектора управления  $\bar{\beta}(t)$  и вектора обратной связи по состоянию  $\bar{\alpha}(t)$ . Матрица обратной связи  $A$  формирует сигнал  $\bar{\alpha}(t)$  из вектора состояния  $\bar{z}(t)$ . Матрица управления  $B$  преобразует  $m$ -мерный вектор входных воздействий  $\bar{u}(t)$  в  $n$ -мерный вектор управлений  $\bar{\beta}(t)$ , а матрица  $C$  преобразует  $n$ -мерный вектор состояния  $\bar{z}(t)$  в  $k$ -мерный выход

$$\bar{y}(t) = C \bar{z}(t). \tag{7}$$

Для случая, представленного развернутой структурной моделью (см. рис. 2), управление  $u(t)$  – скалярная переменная,  $m = 1$  и матрица  $B$  вырождается в вектор-столбец с единственным ненулевым коэффициентом  $\beta$ . Матрица  $C$  преобразует  $n$ -мерный вектор состояния  $\bar{z}(t)$  в одномерный скалярный выход  $y(t) = z_1(t)$ .

Передаточную функцию (4) можно представить в виде произведения элементарных сомножителей

$$W(p) = \frac{b_0}{a_n} \frac{1}{p - \lambda_1} \frac{1}{p - \lambda_2} \dots \frac{1}{p - \lambda_n} = \frac{b_0}{a_n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{p - \lambda_i}, \tag{8}$$

где  $\lambda_i$  – корни характеристического уравнения

$$\sum_{i=1}^n a_i p^i = 0. \tag{9}$$

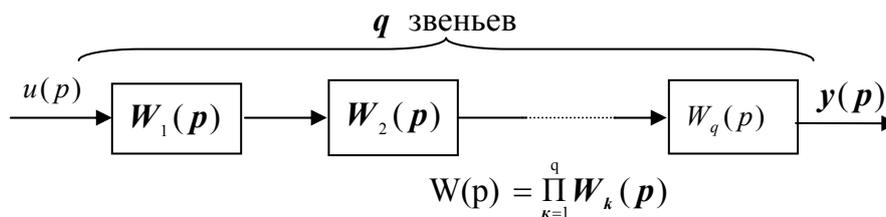


Рис. 5. Последовательное соединение элементарных звеньев  
 Fig. 5. Consecutive connection of elementary links

Корни уравнения (9) являются действительными или комплексно-сопряженными числами.

Передаточная функция системы, показанной на рис. 3, а, имеет вид

$$W_a(p) = \frac{1}{(p + a_0)}. \quad (10)$$

Для системы с положительной ОС (см. рис. 3, б) коэффициент в цепи ОС – корень характеристического уравнения, и поэтому эта структурная модель непосредственно реализует сомножитель вида  $1 / (p - \lambda)$ . Соответствующее ему типовое звено называют *аперидическим* или *инерционным*.

Передаточную функцию приводим к виду со свободным членом в знаменателе, равным единице:

$$W_a(p) = \frac{k}{T_a p + 1}, \quad (11)$$

где  $T_a = 1 / a_0$  и  $k = 1 / a_0 = T_a$ .

Для структурной модели с несколькими контурами обратной связи передаточная функция колебательного звена равна

$$W_k(p) = \frac{1}{p^2 + a_1 p + a_0}. \quad (12)$$

При  $a_1 = 0$  она принимает вид

$$W_k(p) = \frac{1}{p^2 + a_c}. \quad (13)$$

Характеристическое уравнение  $p^2 + a_0 = 0$  имеет чисто мнимые сопряженные корни

$$p_{1,2} = \pm j\sqrt{a_0} = \pm jw_0, \quad (14)$$

а реакция звена (13) на ступеньку на входе представляет собой незатухающие гармонические колебания с частотой  $w_0$ . Коэффициент  $a_0$  равен квадрату резонансной частоты колебательного звена. При  $a_1 \neq 0$  характеристическое уравнение имеет корни

$$p_{1,2} = \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}. \quad (15)$$

При  $a_1 / 2 < w_0$  корни становятся комплексно-сопряженными

$$p_{1,2} = \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm jw_0 \sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}. \quad (16)$$

Собственная частота  $w_1$  равна

$$w_1 = w_0 \sqrt{1 - \left(\frac{a_1}{2w_0}\right)^2}. \tag{17}$$

Она проявляется в виде частоты колебаний на выходе звена при ненулевых начальных условиях или при подаче на вход звена единичной ступеньки вида

$$h(t) = k \left[ 1 - e^{-\beta t} \left( \cos w_1 t + \frac{\beta}{w_1} \sin w_1 t \right) \right] \cdot 1[t].$$

Параметр  $\xi = a_1 / 2w_0$  называют степенью затухания, а  $\beta = \xi w_0$  – коэффициентом затухания. Коэффициент модели  $a_1 = 2w_0\xi = 2\beta$  равен удвоенному коэффициенту затухания  $\beta$ .

Передаточную функцию колебательного звена

$$W_k(p) = \frac{1}{p^2 + 2\xi w_0 p + w_0^2} \tag{18}$$

часто приводят к виду со свободным членом в знаменателе, равным 1:

$$W_k(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi w_0 T p + 1}, \tag{19}$$

где  $T = 1 / w_0$  – постоянная времени колебательного звена; в нашем случае  $k = T^2 = 1 / a_0$ .

Структурная модель, показанная на рис. 6, реализует пару сомножителей вида  $\frac{1}{p - \lambda} \cdot \frac{1}{p - \lambda^*}$ , соответствующих паре комплексно-сопряженных корней  $\lambda, \lambda^* = -\beta \pm jw_1$ .

Запись передаточной функции в виде произведения дробей (8) можно рассматривать как еще одно аналитическое представление системы. Также это представление возможно в виде последовательно соединенных элементарных звеньев, приведенных на рис. 3, б и 5, соответствующих корням характеристического уравнения (8) этой системы (рис. 6).

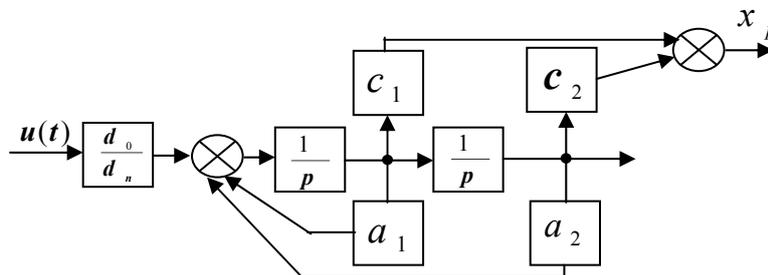


Рис. 6. Схема с комплексно-сопряженными корнями  
Fig. 6. Scheme with complex conjugate roots

Передаточную функцию (8) в случае действительных различных корней можно преобразовать к виду

$$W(p) = \frac{b_0}{a_n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{p - \lambda_i} = \frac{b_0}{a_n} \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{p - \lambda_i}, \tag{20}$$

соответствующему параллельному соединению элементарных звеньев вида  $1 / (p - \lambda_i)$  (рис. 7).

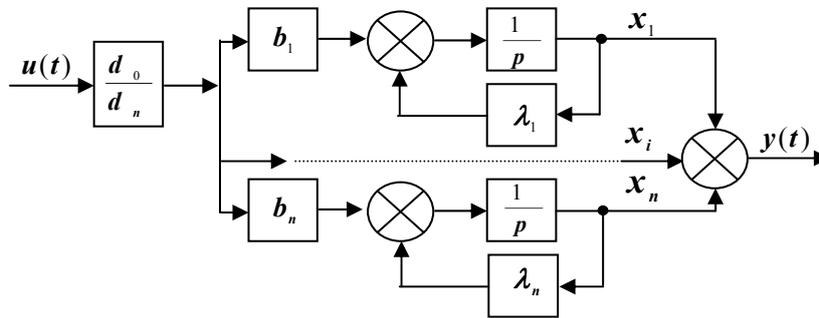


Рис. 7. Параллельное соединение элементарных звеньев  
Fig. 7. Parallel connection of elementary links

Значение коэффициента  $\beta_i$  находят как вычеты функции комплексного переменного  $W(p)$  в полюсах или рассчитывают методом неопределенных коэффициентов. Такая модель непосредственно соответствует аналитической записи общего решения как линейной комбинации частных решений, определяемых корнями характеристического уравнения в виде

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t}, \quad (21)$$

где  $c_i$  – коэффициенты, рассчитываемые по начальным условиям.

Эта модель удобна для графоаналитического расчета переходной характеристики системы как суммы переходных характеристик входящих в ее состав типовых звеньев.

В случае кратных действительных корней можно использовать структурную модель, показанную на рис. 8.

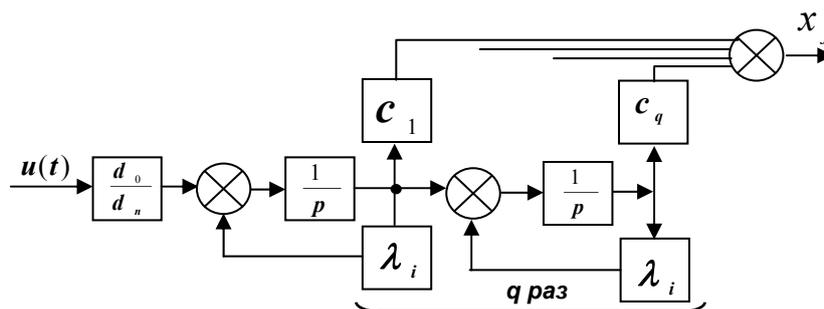


Рис. 8. Схема с действительными корнями  
Fig. 8. The Scheme with the valid roots

Коэффициенты  $C_i$  для этих моделей удобнее всего рассчитать методом неопределенных коэффициентов. В матрице  $\Lambda$  колебательным звеньям соответствуют элементы вида

$$\begin{vmatrix} -\beta & w_1 \\ -w_1 & -\beta \end{vmatrix}$$

Для системы с передаточной функцией общего вида

$$W(p) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k p^k}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} \dots b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad (22)$$

запишем изображение Лапласа выходной переменной  $y(p)$  как

$$y(p) = \sum_{k=0}^m b_k p^k \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} u(p). \quad (23)$$

Введем дополнительную переменную  $z(p)$  в виде

$$z(p) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n a_i p^i} u(p), \quad (24)$$

передаточная функция для которой  $W(p) = z(p) / u(p)$  совпадает с передаточной функцией (4) при  $b_0 = 1$ .

Из соотношений (23) и (24) можно записать

$$y(p) = \sum_{k=1}^m b_k p^k z(p). \quad (25)$$

Из этого уравнения следует, что сигнал  $y(t)$  можно получить суммированием компонент состояния с выходов интеграторов, умноженных на соответствующие коэффициенты от  $b_0$  до  $b_{n-1}$  при  $m = n$  и высшей производной  $p^n z(t)$ , умноженной на коэффициент  $b_n$  (рис. 9).

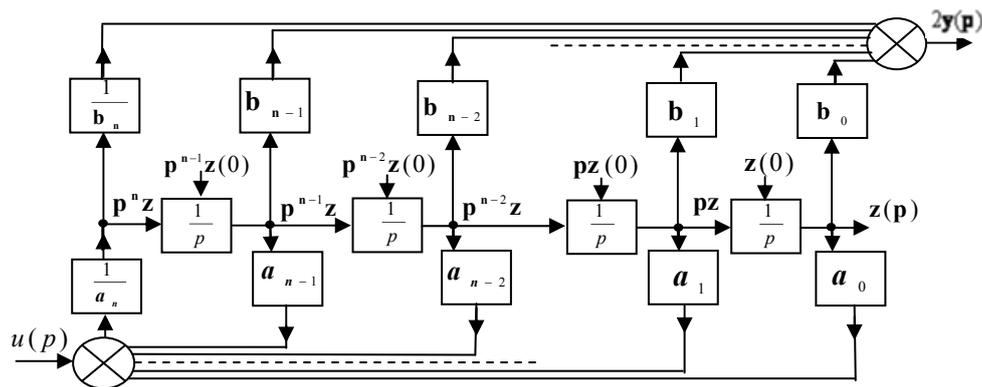


Рис. 9. Структурная модель систем общего вида  
Fig. 9. Structural model of systems of a general view

Если  $m < n$ , то коэффициенты  $b_k = 0$  для всех  $k > m$ . В таком представлении  $n$ -мерный интегратор с матрицей обратной связи и  $n$ -мерным сумматором на входе (см. рис. 2) по-прежнему моделирует преобразование скалярного входа  $u(t)$  в состояние системы  $\vec{z}(t)$ , в совокупность коэффициентов  $b_i$ .

Сумматор 2 на рис. 9 представляет блок  $C$  структуры на рис. 2, преобразующий состояние  $\vec{z}(t)$  в скалярный выходной сигнал  $y(t)$  таким образом, чтобы зависимость последнего от входного сигнала  $u(t)$  удовлетворяла дифференциальному уравнению общего вида (1).

Другой вариант структурной модели для системы общего вида показан на рис. 10.

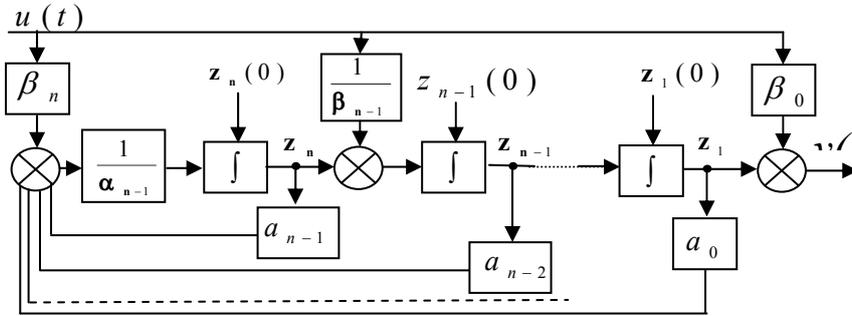


Рис. 10. Вариант структурной модели для систем общего вида  
Fig. 10. Variant of structural model for systems of the general

Коэффициенты  $\beta_k$  этой модели рассчитывают по формулам

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= \frac{1}{a_n} b_n; \\ \beta_1 &= \frac{1}{a_n} (b_{n-1} - \beta_0 a_{n-1}); \\ \beta_2 &= \frac{1}{a_n} (b_{n-2} - \beta_0 a_{n-1} - \beta_1 a_{n-1}); \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

По структурной модели (см. рис. 10) получаем систему  $n$ -уравнений первого порядка

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) + \beta_1 u(t); \\ \dot{z}_2(t) &= z_3(t) + \beta_2 u(t); \\ &\dots \\ \dot{z}_n(t) &= -\frac{1}{a_n} \sum_{i=0}^n a_i z_i(t) + \frac{\beta_n}{a_n} u(t), \end{aligned} \right. \quad (27)$$

представляем ее в развернутой матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1}(t) \\ \dot{z}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_{n-1}(t) \\ z_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u(t), \quad (28)$$

где  $\alpha_i = a_i / a_n$

и записываем векторное уравнение

$$\dot{\bar{z}}(t) = A\bar{z}(t) + \bar{B}u(t). \tag{29}$$

Структурная модель на рис. 10 показывает, что и в этом случае состояние системы  $\bar{z}(t)$  есть совокупность сигналов на выходах интеграторов (см. рис. 2), но их входные сигналы формируются как линейные комбинации компонент состояния  $z_i(t)$  и управлений от вектора входных коэффициентов  $\bar{B}$  (блок  $B$  и сумматор на рис. 2). Скалярный выход  $y(t)$  формируется из компонента  $z_1(t)$  и управления  $u(t)$  как  $y(t) + \beta_0 u(t)$ .

Передаточную функцию общего вида (22) можно разложить на элементарные сомножители, найдя не только ее полюса (10), но и нули, как корни уравнения

$$b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0, \tag{30}$$

которое получают, приравняв нулю числитель передаточной функции.

Передаточная функция в виде произведения элементарных сомножителей

$$W(p) = \frac{\prod_{k=0}^m (p - \gamma_k)}{\prod_{i=0}^n (p - \lambda_i)}, \tag{31}$$

где  $\lambda_i$  – полюса и  $\gamma_k$  – нули передаточной функции, рассматривают как последовательное соединение типовых звеньев следующего вида:

- инерционно-дифференцирующего звена

$$W_1(p) = \frac{p - \gamma_\ell}{p - \lambda_\ell}; \tag{32}$$

- колебательного звена с дифференцированием

$$W_2(p) = \frac{p - \gamma_r}{p^2 + 2\xi w_{0r} p + w_{0r}^2}; \tag{33}$$

- колебательного звена с двойным дифференцированием

$$W_3(p) = \frac{p^2 + 2\xi_s w_{0s} p + w_{0s}^2}{p^2 + 2\xi_q w_{0q} p + w_{0q}^2}. \tag{34}$$

Их структурные модели получаются как частные случаи общих моделей (см. рис. 10) при  $n = 1$  и  $2$ .

Если собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$  матрицы  $A$  системы – действительные различные числа, то используем преобразование

$$\bar{x}(t) = P^{-1} \bar{z}(t), \tag{35}$$

где  $P$  – матрица Вандермонда.

Систему (35) можно преобразовать к виду

$$\vec{\dot{x}}(t) = \Lambda \vec{x}(t) + P^{-1} \vec{B}u(t), \quad (36)$$

где  $\Lambda$  – диагональная матрица собственных значений.

Преобразование изменяет вектор управления

$$\vec{U} = P^{-1} \vec{b}. \quad (37)$$

Используя последнее соотношение, можно записать

$$\vec{\dot{x}}(t) = \Lambda \vec{x}(t) + \vec{U}u(t). \quad (38)$$

Система (32) отличается вектором управления, компоненты которого  $u$  равны вычетам передаточной функции системы в полюсах и могут быть рассчитаны методом неопределенных коэффициентов.

### **Выводы**

Рассмотренные варианты математического описания структурных представлений динамических процессов могут служить при разработке новых технических средств судов и исследования существующих для следующих целей :

- разработки программного обеспечения для анализа динамических характеристик технических средств судов;
- исследования динамических характеристик технических средств судов в различных режимах работы, особенно в граничных режимах работы.

### **Список литературы**

1. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: практическое руководство / пер. с англ. – М.: Мир, 1992. – 238 с.
2. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границы области устойчивости. – М.: Наука, 1994. – 176 с.
3. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. – М.: Наука, 1990. – 312 с.

**Сведения об авторах:** Молочков Валентин Яковлевич, кандидат технических наук, доцент, e-mail: val\_mol@mail.ru;  
Молочкова Ирина Дмитриевна, доцент.