
ПРОМЫШЛЕННОЕ РЫБОЛОВСТВО. АКУСТИКА

УДК 534.222 : 629.127.4

Р.Н. Алифанов¹, И.А. Алифанова¹, А.А. Карпачев², П.А. Стародубцев²

¹Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет,
690087, г. Владивосток, ул. Луговая, 52б

²Военный учебно-научный центр Военно-Морского флота «Военно-морская академия
имени адмирала флота Советского Союза Н.Г. Кузнецова» (филиал, г. Владивосток),
690006, г. Владивосток, Днепровский переулок, 6

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕД И ДРОБНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Представлены основные этапы формирования теории динамических процессов в электродинамике. Показано, что в настоящее время ощущается недостаточность традиционных физических моделей, ввиду отсутствия полного описания процессов обработки сигналов и полей с помощью формул классической математики, полученных на основе представления сигналов в пространствах целочисленных мер и гладких функций. Для получения новых математических зависимостей и в связи с созданием Б. Мандельбротом общей концепции фракталов появилась мысль о применении их в области радиофизики и радиолокации. В то же время с использованием достижений масштабной инвариантности: «скейлинга» и разделов современного функционального анализа, связанных с теорией множеств, теорией дробной размерности, общей топологией, геометрической теорией меры и теорией динамических систем, – открылись потенциальные возможности и перспективы в обработке многомерных сигналов и в родственных научных и технических областях, например, нелинейная гидроакустика. Для применения формул классической математики, полученных на основе представления сигналов в пространствах целочисленных мер и гладких функций, в статье предложен математический аппарат использования дробного интегро-дифференцирования в уравнениях электродинамики материальных сред. В основу таких предложений положены интегро-дифференциальные операторы Римана-Лиувилля и Капуто.

Ключевые слова: фракталы, скейлинг, дробное интегро-дифференцирование.

R.N. Alifanov, I.A. Alifanova, A.A. Karpachev, P.A. Starodubtcev ELECTRODYNAMICS OF MATERIAL MEDIA AND FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

The article presents the main stages of the theory of dynamical processes in electrodynamics. It is shown that currently there is a lack of traditional physical models, due to lack of a complete description of the processing of signals and fields using the formulas of classical mathematics, obtained on the basis of representation of signals in the spaces of integral action and smooth functions. To receive new mathematical relationships and the establishment of the general concept by B. Mandelbrot fractals had the idea of applying them in the field of radio and radar. At the same time, the use of the achievements of scale invariance – "scaling" and sections of modern functional analysis related to the theory of sets of fractional dimension theory, general topology, geometric measure theory and the theory of dynamical systems, opened the potential and prospects in multidimensional signal processing and related scientific and technical fields, such as nonlinear underwater acoustics. To apply the formulas of classical mathematics, derived representation of signals in the spaces of integral action and smooth functions, the article proposed the use of the mathematical apparatus of fractional integro-differential equations of electrodynamics in material media. The basis of such proposals put integro-differential operators of the Riemann-Liouville and Caputo.

Key words: fractals, scaling, fractional integro-differentiation.

Введение

Открытия второй половины XX в. кардинально изменили наше представление о характере динамических процессов. Но в XXI в. явно ощущается недостаточность традиционных физических моделей, потому что полное описание процессов современной обработки сигналов и полей невозможно с помощью формул классической математики, полученных на основе представления сигналов в пространствах целочисленных мер и гладких функций [1].

Стационарные режимы и периодические движения долгое время считались единственно возможными состояниями, но в конце XX в. в связи с созданием Б. Мандельбротом общей концепции фракталов [1-3] возникла мысль о применении их в области радиофизики и радиолокации, что существенно изменило их теоретическую базу. Идеи масштабной инвариантности: «скейлинга» и разделов современного функционального анализа, которые связаны с теорией множеств, теорией дробной размерности, общей топологией, геометрической теорией меры и теорией динамических систем, – открывают большие потенциальные возможности и новые перспективы в обработке многомерных сигналов и в родственных научных и технических областях, таких как нелинейная гидроакустика.

Основная часть

В [4] представлен один из первых способов введения дробного интегро-дифференцирования в основные уравнения электродинамики материальных сред. В этой работе при дробном исчислении используются интегро-дифференциальные операторы Римана-Лиувилля и Капуто [4]. Оператор дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in R$ с началом в точке S функции $y(t)$ представляется в следующем виде:

$$D_{st}^{\alpha} y(t) = \text{sign}^n(t-s) \frac{d^n}{dt^n} D_{st}^{\alpha-n} y(t), \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in N, \quad \alpha > 0,$$

$$D_{st}^{\alpha} y(t) = \frac{\text{sign}(t-s)}{\Gamma(-\alpha)} \int_s^t \frac{y(\theta)}{|t-\theta|^{\alpha+1}} d\theta, \quad \Gamma(x) - \text{гамма-функция Эйлера}, \quad \alpha < 0,$$

$$D_{st}^{\alpha} y(t) = 0, \quad \alpha = 0.$$

Оператор Капуто (регуляризованная дробная производная) определяется с помощью равенства

$$\partial_{0t}^{\alpha} y(t) = \text{sign}^n(t-s) D_{st}^{\alpha-n} \frac{d^n}{dt^n} y(t), \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in N, \quad \alpha > 0.$$

Связь между операторами Римана-Лиувилля и Капуто дается соотношением

$$\partial_{0t}^{\alpha} y(t) = D_{st}^{\alpha} y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(s)}{\Gamma(k+1-\alpha)}, \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in N, \quad \alpha > 0. \quad (1)$$

Если выполняется равенство $y^{(k)}(s) = 0$, то операторы Римана-Лиувилля и Капуто тождественны. При целочисленном значении параметра α эти операторы также совпадают между собой и совпадают с обычными производными целого порядка.

В то же время в [5] вводится понятие d -оператора порядка $s \geq 0$, действующим над множеством степенных функций x^q , для которых выполняются условия: $s, q, x \in R$, $|s|, |q| = const < \infty$:

$$d^{-s}x : x^q = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+1-s)} x^{q-s}, q \notin N^-, q-s \notin N^-. \quad (2)$$

Очевидно, что данный оператор также является оператором дробного интегро-дифференцирования.

В [5] получена система уравнений Максвелла в дробных производных с использованием оператора Капуто. Заменим в данных уравнениях оператор Капуто на d -оператор порядка $s \geq 0$:

$$rot \mathbf{E} = -\frac{1}{\tau} d^{-s}t : \mathbf{B}; \quad div \mathbf{B} = 0; \quad (3)$$

$$rot \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{1}{\tau} d^{-s}t : \mathbf{D}; \quad div \mathbf{D} = \rho \quad (4)$$

и материальные уравнения среды [6]:

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}; \quad \mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E},$$

где \mathbf{E} – напряженность электрического поля, В/м; \mathbf{B} – магнитная индукция, Вб/м² (кг·с⁻²·А); \mathbf{H} – напряженность магнитного поля, А/м; \mathbf{D} – электрическая индукция, Кл/м²; \mathbf{j} – плотность тока, Кл/м²; ρ – плотность тока проводимости, Кл/м²; τ – калибровочный коэффициент для дробной производной; ε_0 – электрическая постоянная, Ф/м; ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды; μ_0 – магнитная постоянная, Гн/м; μ – относительная магнитная проницаемость среды.

Векторный потенциал \mathbf{A} вводится стандартно:

$$\mathbf{B} = rot \mathbf{A}.$$

Подстановка данного выражения в уравнение (3) приводит к формулам:

$$rot \mathbf{E} = -\frac{1}{\tau} d^{-s}t : (rot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\tau} rot d^{-s}t : \mathbf{A} = rot \left(-\frac{1}{\tau} d^{-s}t : \mathbf{A} \right); \quad div (rot \mathbf{A}) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$rot \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\tau} d^{-s}t : \mathbf{A} \right) = 0.$$

Так как ротор от градиента любой скалярной функции φ равен нулю, то выражение в скобках равно градиенту этой функции, т.е.

$$\left(\mathbf{E} + \frac{1}{\tau} d^{-s} t : \mathbf{A} \right) = \nabla \varphi, \text{ или } \mathbf{E} = -\frac{1}{\tau} d^{-s} t : \mathbf{A} + \nabla \varphi,$$

где φ – скалярный потенциал. В уравнениях (4) векторы \mathbf{H} и \mathbf{D} заменяются на их выражения через векторы \mathbf{B} и \mathbf{E} . В свою очередь, векторы \mathbf{B} и \mathbf{E} заменяются на векторный и скалярный потенциалы:

$$\text{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu\mu_0} \right) = \mathbf{j} + \frac{1}{\tau} d^{-s} t : (\varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}); \quad \text{div}(\varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho,$$

$$\text{или } \text{rot} \left(\frac{\text{rot} \mathbf{A}}{\mu\mu_0} \right) = \mathbf{j} + \frac{1}{\tau} d^{-s} t : \left(\varepsilon\varepsilon_0 \left(-\frac{1}{\tau} d^{-s} t : \mathbf{A} + \nabla \varphi \right) \right); \quad \text{div} \left(\varepsilon\varepsilon_0 \left(-\frac{1}{\tau} d^{-s} t : \mathbf{A} + \nabla \varphi \right) \right) = \rho.$$

Выполняются следующие преобразования данных уравнений:

$$\begin{aligned} \text{rot rot} \mathbf{A} &= \mu\mu_0 \mathbf{j} - \frac{\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0}{\tau^2} d^{-2s} t : \mathbf{A} + \frac{\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0}{\tau} d^{-s} t : \nabla \varphi = \\ &= \mu\mu_0 \mathbf{j} - \frac{\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0}{\tau^2} d^{-2s} t : \mathbf{A} + \nabla \left(\frac{\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0}{\tau} d^{-s} t : \varphi \right). \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{div} \left(-\frac{1}{\tau} d^{-s} t : \mathbf{A} + \nabla \varphi \right) = -\frac{1}{\tau} d^{-s} t : (\text{div}) \mathbf{A} + \text{div} \nabla \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (6)$$

Далее, не ограничивая общности, принимается условие калибровочной инвариантности:

$$\text{div} \mathbf{A} = \left(\frac{\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0}{\tau} d^{-s} t : \varphi \right).$$

Использование данного условия для исключения скалярного потенциала φ в уравнении (5) и, наоборот, для исключения векторного потенциала \mathbf{A} в уравнении (6) позволяет получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \text{rot rot} \mathbf{A} &= \mu\mu_0 \mathbf{j} - \frac{\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0}{\tau^2} d^{-2s} t : \mathbf{A} + \nabla (\text{div} \mathbf{A}), \\ -\frac{1}{\tau} d^{-s} t : \left(\frac{\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0}{\tau} d^{-s} t : \varphi \right) + \text{div} \nabla \varphi &= \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}, \text{ или } -\frac{\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0}{\tau^2} d^{-2s} t : \varphi + \text{div} \nabla \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

Из теории поля известно, что верны следующие выражения:

$$\text{rot rot} \mathbf{A} = \nabla (\text{div}) \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}, \text{ и } \text{div} \nabla \varphi = \Delta \varphi.$$

С учетом первого выражения определяется уравнение для векторного потенциала:

$$\nabla(\operatorname{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} = \mu\mu_0\mathbf{j} - \frac{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}{\tau^2} d^{-2s}t : \mathbf{A} + \nabla(\operatorname{div}\mathbf{A}),$$

или

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{\mu\varepsilon}{(c\tau)^2} d^{-2s}t : \mathbf{A} = -\mu\mu_0\mathbf{j}. \quad (7)$$

А с учетом второго выражения получают уравнение для скалярного потенциала:

$$\Delta\varphi - \frac{\mu\varepsilon}{(c\tau)^2} d^{-2s}t : \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (8)$$

где $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 292\,792\,458$ м/с (скорость света в вакууме).

Уравнения (7) и (8) представляют собой уравнения с изменяющимся типом: при $s=1$ – гиперболический тип; при $s = 1/2$ – параболический тип. Такие уравнения в литературе называют диффузионно-волновыми уравнениями. Их решение можно получить методом функции Грина [7].

Анализируются свойства электромагнитного поля в диэлектрике с постоянными значениями ε и μ , исходя из диффузионно-волнового уравнения. Для этого записывается одномерное уравнение дробного порядка

$$d^{-2s}t : u(x,t) - \frac{(c\tau)^2}{\mu\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{(c\tau)^2}{\mu\varepsilon} \cdot \frac{\rho(x,t)}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (9)$$

где под функцией $u(x,t)$ понимается \bar{A} или φ . Уравнение (9) – линейное, и его частное решение можно представить в виде

$$u(x,t) = u_0 \cdot \exp(ikx) \cdot z(t),$$

где $z(t)$ – неизвестная функция, u_0 – комплексная амплитуда, k – компонент волнового вектора в направлении X . Подставляя это частное решение в (9), получаем уравнение

$$d^{-2s} : z(t) + \omega^2 z(t) = -\frac{\omega^2}{k^2} \cdot \frac{\rho(x,t)}{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{u_0 \exp(ikx)}, \quad (10)$$

где $\omega = \frac{ck\tau}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ – безразмерная частота.

Решение уравнения (10) ищется обычным способом в виде степенного ряда [7]. Частным решением уравнения (10) является функция

$$z(t) = E_{2s}(-\omega^2 t^{2s}),$$

где $E_{2s}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{\Gamma(2s \cdot n + 1)}$ – функция Миттага-Леффлера.

Дробное дифференцирование порядка $2s$ функции $z(t)$ приводит к выражению

$$\begin{aligned} d^{-2s} : z(t) &= d^{-2s} : E_{2s}(-\omega^2 t^{2s}) = d^{-2s} : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\omega^2 t^{2s})^n}{\Gamma(2sn+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\omega^2)^n}{\Gamma(2sn+1)} d^{-2s} : t^{2sn} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\omega^2)^n}{\Gamma(2sn+1)} \frac{\Gamma(2sn+1) \cdot t^{2sn-2s}}{\Gamma(2sn+1-2s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\omega^2)^1 (-\omega^2)^{n-1} t^{2s(n-1)}}{\Gamma(2s(n-1)+1)} = \frac{t^{-2s}}{\Gamma(-2s+1)} - \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\omega^2 t^{2s})^n}{\Gamma(2sn+1)} = \\ &= \frac{t^{-2s}}{\Gamma(-2s+1)} - \omega^2 E_{2s}(-\omega^2 t^{2s}) = \frac{t^{-2s}}{(-2s)\Gamma(-2s)} - \omega^2 z(t). \end{aligned}$$

После подстановки результата дробного дифференцирования в уравнение (10) получаем [7]:

$$\frac{t^{-2s}}{2s\Gamma(-2s)} = \frac{\omega^2}{k^2} \cdot \frac{\rho(x,t)}{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{u_0 \exp(ikx)}.$$

Отсюда определяется выражение для плотности тока проводимости:

$$\rho(x,t) = u_0 \exp(ikx) \frac{t^{-2s}}{2s\Gamma(-2s)} \frac{k^2 \varepsilon\varepsilon_0}{\omega^2}.$$

Таким образом, определяется решение

$$u(x,t) = u_0 \cdot \exp(ikx) \cdot E_{2s}(-\omega^2 t^{2s}).$$

Отметим, что в нашем случае дробное интегро-дифференцирование и соответственно феноменологический параметр s учитывают влияние фрактальных свойств движения зарядов в диссипативной среде на создаваемое электромагнитное поле. При уменьшении S происходит затухание электромагнитных волн, причем при медленном диффузионном блуждании ($s < 1/2$) затухание имеет степенную асимптотику $E_{2s}(-t^2) \propto t^{2s}/\Gamma(-2s+1)$, характерную для многих фрактальных систем [7, 8].

На рис. 1 в качестве примера показаны графики функции $E_{2s}(-t^{2s})$ для различных значений параметра $2s$. Если параметр $2s$ находится в интервале от 1 до 2, то по переменной t будем иметь периодическую функцию с частотой ω . Если параметр $2s$ находится в интервале от 0 до 1, то функция становится монотонно убывающей. Нетрудно заметить, что параметр $2s$ определяет скорость убывания функции.

Рассмотрим предельные случаи. Пусть $2s = 2$ (гиперболический случай). Тогда функция Миттага-Леффлера преобразуется в гиперболический косинус:

$$E_2(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{\Gamma(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{y})^{2n}}{2n!} = ch(\sqrt{y}).$$

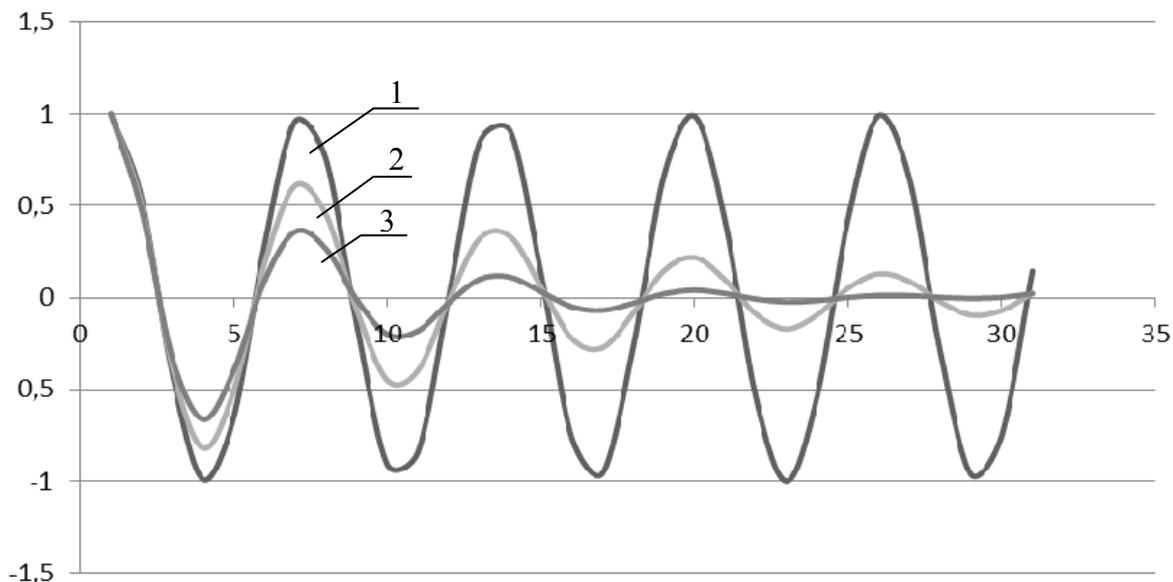


Рис. 1. Графики функции Миттага-Леффлера $E_{2s}(-t^{2s})$ при различных значениях параметра $2s$:
 1) $2s = 2$; 2) $2s = 1,9$; 3) $2s = 1,8$

Fig. 1. Graphs Mittag-Leffler $E_{2s}(-t^{2s})$ functions for different values of $2s$:

1) $2s = 2$; 2) $2s = 1,9$; 3) $2s = 1,8$

Следовательно, решение $u(x, t)$ будет иметь вид

$$u(x, t) = u_0 \cdot \exp(ikx) \cdot E_2(-\omega^2 t^2) = u_0 \cdot \exp(ikx) \cdot \operatorname{ch}\left(\sqrt{-\omega^2 t^2}\right) = u_0 \cdot \exp(ikx) \cdot \operatorname{ch}(i\omega t)$$

Решение этого вида определяет плоскую монохроматическую волну, являющуюся периодической функцией по обеим переменным.

При $2s = 1$ (параболический случай) функция Миттага-Леффлера преобразуется в экспоненту:

$$E_1(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{\Gamma(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \exp(y).$$

Следовательно, решение $u(x, t)$ будет иметь вид

$$u(x, t) = u_0 \cdot \exp(ikx) \cdot E_1(-\omega^2 t) = u_0 \cdot \exp(ikx) \cdot \exp(-\omega^2 t) = u_0 \cdot \exp(ikx - \omega^2 t)$$

Данное решение является периодическим лишь по переменной x . Его также можно понимать как плоскую волну, но с убывающей по времени амплитудой.

Рассмотрим теперь свойства свободного электромагнитного поля в диэлектрике с постоянными значениями ϵ и μ , исходя из приведенного выше диффузионно-волнового уравнения. Для этого записывается одномерное однородное уравнение дробного порядка

$$d^{-2s}t : u(x, t) - \frac{(c\tau)^2}{\mu\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) – линейное, и его частное решение также можно представить в виде

$$u(x, t) = u_0 \cdot \exp(ikx) \cdot z(t),$$

где $z(t)$ – неизвестная функция, u_0 – комплексная амплитуда, k – компонент волнового вектора в направлении X . Подставляя это частное решение в (11), получаем уравнение

$$d^{-2s} : z(t) + \omega^2 z(t) = 0, \quad (12)$$

где $\omega = \frac{ck\tau}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ – безразмерная частота.

Решение уравнения (12) также ищется в виде степенного ряда [8]. В качестве частного решения этого уравнения выберем дробный полином порядка $2s$ степени m , как определено в [4]:

$$P_{2s/m}(t) = \sum_{n=0}^m a_n \cdot t^{2s(n+1)-1}, \quad a_n = \text{const}, \quad (n=0, 1, 2, \dots, m).$$

При взятии дробной производной порядка $2s$ от данного дробного полинома получаем:

$$\begin{aligned} d^{-2s}t : P_{2s/m}(t) &= d^{-2s}t : \sum_{n=0}^m a_n \cdot t^{2s(n+1)-1} = \sum_{n=0}^m a_n \cdot d^{-2s} : t^{2s(n+1)-1} = \sum_{n=0}^m a_n \frac{\Gamma(2s(n+1))}{\Gamma(2sn)} t^{2sn-1} = \\ &= a_0 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0)} t^{-1} + \sum_{n=1}^m a_n \frac{\Gamma(2s(n+1))}{\Gamma(2sn)} t^{2sn-1} = 0 + \sum_{n=0}^{m-1} a_{n+1} \frac{\Gamma(2s(n+2))}{\Gamma(2s(n+1))} t^{2s(n+1)-1}. \end{aligned}$$

Здесь $\Gamma(0) = \infty$, поэтому первый член ряда равен нулю. Выбираем полином бесконечной степени, т.е. $m = \infty$, и потребуем выполнения условия

$$a_n = a_{n+1} \frac{\Gamma(2s(n+2))}{\Gamma(2s(n+1))}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Отсюда следуют равенства

$$d^{-2s}t : P_{2s/\infty}(t) = P_{2s/\infty}(t), \quad a_n = \frac{1}{\Gamma(2s(n+1))}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Теперь определяем функцию

$$K_{2s}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2s(n+1)-1}}{\Gamma(2s(n+1))} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2sn-1}}{\Gamma(2sn)}.$$

Нетрудно убедиться в том, что для данной функции верны следующие выражения:

$$d^{-2s}t: K_{2s}(t) = K_{2s}(t) \text{ и } d^{-2s}t: K_{2s}(\theta t) = \theta^{2s} K_{2s}(\theta t),$$

где θ – константа.

В качестве частного решения уравнения (12) выбираем функцию

$$z(t) = K_{2s}(\theta t),$$

при этом значение константы θ определяется из уравнения

$$\theta^{2s} K_{2s}(\theta t) + \omega^2 K_{2s}(\theta t) = 0.$$

Отсюда получаем, что $\theta^{2s} = -\omega^2 = (i\omega)^2$, или $\theta = (i\omega)^{1/s}$.

Таким образом, определяется решение

$$u(x, t) = u_0 \cdot \exp(ikx) \cdot K_{2s}((i\omega)^{1/s} t).$$

На рис. 2 в качестве примера показаны графики функции $k_{2s}(\omega, t) = (i\omega)^{1/s} K_{2s}((i\omega)^{1/s} t)$ для различных значений параметра $2s$ при $\omega = 1$.

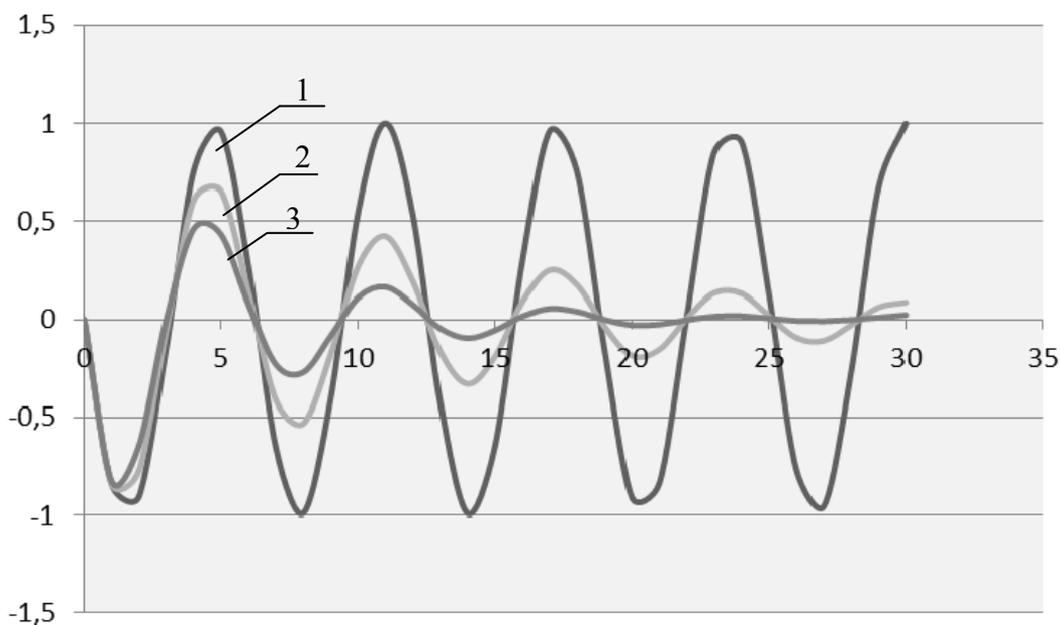


Рис. 2. Графики функции $k_{2s}(\omega, t)$ при различных значениях параметра $2s$:

1) $2s = 2$; 2) $2s = 1,9$; 3) $2s = 1,8$

Fig. 2. Graphs of the function with different values of parameters $2s$:

1) $2s = 2$; 2) $2s = 1,9$; 3) $2s = 1,8$

Отметим, что в нашем случае функция $K_{2s}(t)$ при предельном значении параметра $2s = 2$ (гиперболический случай) преобразуется в гиперболический синус:

$$K_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{\Gamma(2n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} = sh(t).$$

Следовательно, решение $u(x, t)$ будет иметь вид

$$u(x, t) = u_0 \cdot \exp(ikx) \cdot K_2((i\omega)^{1/s} t) = u_0 \cdot \exp(ikx) \cdot sh((i\omega)^{1/s} t).$$

Решение этого вида также определяет плоскую монохроматическую волну.

В параболическом случае $2s = 1$ и функция $K_{2s}(t)$ преобразуется в экспоненту

$$K_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \exp(t).$$

Следовательно, решение $u(x, t)$ будет иметь вид

$$u(x, t) = u_0 \cdot \exp(ikx) \cdot K_1((i\omega)^{1/s} t) = u_0 \cdot \exp(ikx) \cdot \exp((i\omega)^{1/s} t).$$

В заключении необходимо отметить следующее. Параметр S определяет не только фрактальные свойства движения зарядов, но и, в некотором смысле, может охарактеризовать фрактальность исследуемой диссипативной среды [9, 10].

Список литературы

1. Стародубцев П.А., Пичугин К.А., Василенко А.М. Узкополосное параболическое приближение для моделирования характеристик звукового поля движущейся возмущенной области: материалы 46 Всерос. межвуз. науч.-техн. конф. – Владивосток: ТОВМИ им. С.О. Макарова, 2003. – С. 182-185.
2. Потапов А.А., Черных В.А. Дробное исчисление А.В. Летникова, теория фракталов и скейлинг / под ред. А.А. Потапова. – М.: Физматлит, 2009. – 820 с.
3. Стародубцев П.А., Мироненко М.В., Григорьев В.В. Акустическая голография и возможность ее применения в низкочастотной гидроакустической томографии океанской среды // Проблемы и методы разработки и эксплуатации вооружения и военной техники ВМФ. – Владивосток: ТОВВМУ им. С.О.Макарова, 1998. – Вып. 19. – С. 131-137.
4. Стародубцев П.А. Получение аналитического и графического отображения передаточной характеристики гидроакустического канала с использованием импульсных сигналов // Вестн. БГУ. – Улан-Удэ, 2003. – Вып. 2. – С. 107-112.
5. Потапов А.А. Фракталы, скейлинг и дробные операторы в радиотехнике и радиоэлектронике: современное развитие // Журн. радиоэлектроники. – 2010. – № 1. – С. 1-98.

6. Стародубцев П.А. Взаимодействие упругих и электромагнитных волн в проводящей морской среде // Море-2003: сб. докл. рег. науч.-практ. конф. – Владивосток: Тихоокеанская инспекция Российского Морского Регистра судоходства, 2003. – С. 100-104.

7. Чуриков В.А. Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе d-оператора. – Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2010. – 118 с.

8. Стародубцев П.А., Пичугин К.А. Оптимизация процесса обработки гидролокационной информации методами нелинейной фильтрации // Научно-технические технологии. – 2004. – Т. 5, № 5. – С. 45-50.

9. Потапов А.А. Фракталы, скейлинг и дробные операторы как основа новых методов обработки информации и конструирования фрактальных радиосистем // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2008. – № 5(77). – С. 3-19.

10. Стародубцев П.А., Карпачев А.А., Халаев Н.Л. Новые физические объяснения решений уравнений электродинамики материальных сред // Проблемы и методы разработки и эксплуатации вооружения и военной техники ВМФ: сб. науч. тр. – Владивосток: ВУНЦ ВМФ «ВМА» (филиал, г. Владивосток). – 2013. – Вып. 82, ч. 2. – С. 7-12.

Сведения об авторах: Алифанов Роман Николаевич, кандидат технических наук,
e-mail: gidra_518@mail.ru;

Алифанова Ирина Анатольевна, e-mail: shira_83@mail.ru;

Карпачев Александр Афанасьевич, заведующий кафедрой математики,
доктор технических наук, профессор, e-mail: K327065@yandex.ru;

Стародубцев Павел Анатольевич, доктор технических наук, профессор,
e-mail: spa1958@mail.ru.