

УДК 534.231.1

**С.М. Балабаев, Н.Ф. Ивина**Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет,  
690087, г. Владивосток, ул. Луговая, 52б**РАСЧЕТ АКУСТИЧЕСКИХ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН  
ЖИДКОГО ОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОДА**

*Рассмотрены дисперсионные уравнения нормальных волн жидкого однородного волновода с жидким и твердым дном. Рассчитаны дисперсионные зависимости действительной и мнимой составляющих безразмерного волнового числа нормальных волн однородного волновода с твердым дном.*

**Ключевые слова:** дисперсионные уравнения, однородный волновод, нормальные волны.

**S.M. Balabaev, N.F. Ivina****CALCULATION OF ACOUSTIC NORMAL WAVES  
OF LIQUID HOMOGENEOUS WAVEGUIDE**

*The dispersion equations of normal waves of liquid homogeneous waveguide with liquid and solid bottom are considered. Dispersion dependences of the real and imaginary components of the dimensionless wave number of normal waves of homogeneous waveguide with a solid bottom are calculated.*

**Key words:** dispersion equations, homogeneous waveguide, normal waves.

При работе любых гидроакустических систем (определение дальности, глубины, осуществление связи между объектами, поиск рыбных косяков и т.п.) принятая информация обрабатывается в предположении, что вода является бесконечной и однородной, т.е. что в ней распространяется только продольная волна с постоянной скоростью. Но из-за отражений волны от морского дна и границы с воздухом ситуация принципиально меняется. В такой системе (гидроакустическом волноводе) существуют нормальные волны (моды). Классические задачи анализа волноводов рассмотрены в известных монографиях [1, 2]. Целью данной статьи является расчет дисперсионных зависимостей действительной и мнимой составляющих волнового числа нормальных волн однородного волновода с твердым дном, которые в указанных монографиях не рассматривались.

Рассмотрим жидкий волновод толщиной  $h$ , лежащий на жидком или твердом полупространстве. Жидкому полупространству приближенно соответствует морское дно из осадочных пород, а твердому – скальный грунт. Плотность жидкости (среда 1)  $\rho$ ,  $c_0$  – скорость звука в жидкости. Верхняя граница волновода ( $z = h$ ) свободна. Плотность дна (полупространства, среда 2)  $\rho_D$ ;  $c_l$  – скорость продольной волны,  $c_t$  – скорость поперечной волны. Необходимо рассчитать частотные зависимости действительной и мнимой составляющих волнового числа нормальных волн жидкого волновода.

Рассмотрим сразу волновод с твердым дном, так как все соотношения для волновода с жидким дном являются частным случаем при  $c_t \rightarrow 0$ . Введем скалярные и векторные потенциалы смещения:  $\varphi_1 = \varphi_1(x, z)$  – потенциал в жидкости,  $\varphi = \varphi(x, z)$  и  $\psi = \psi(x, z)$  ( $\psi(x, z) \equiv \psi_y(x, z)$ ) – для поля в твердом полупространстве.

Введенные потенциалы должны удовлетворять уравнениям Гельмгольца:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + k_o^2 \varphi_1 &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k_l^2 \varphi &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_t^2 \varphi &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $k_o = \omega / c_o$ ,  $k_l = \omega / c_l$ ,  $k_t = \omega / c_t$ ,  $\omega$  – круговая частота и граничным условиям

$$\sigma_{zz}^{(1)} = 0, \text{ при } z = h; \begin{cases} \sigma_{xz}^{(2)} = 0, \\ \sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(2)}, \text{ при } z = 0, \\ u_z^{(1)} = u_z^{(2)}, \end{cases}\tag{2}$$

где  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{zz}$  – касательное и нормальное напряжения;  $u_z$  – нормальное к границе раздела смещение.

Выразим компоненту смещения и компоненты напряжений, которые понадобятся в дальнейшем, через потенциалы [3, 4]

$$\begin{aligned}u_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \sigma_{xz} &= \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \\ \sigma_{zz} &= \lambda \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right),\end{aligned}\tag{3}$$

где  $\lambda, \mu$  – упругие постоянные Ламе.

Будем искать решения уравнений (1) в виде плоских волн вдоль координаты  $x$ . Тогда эти решения можно записать в виде

$$\begin{aligned}\varphi(x, z) &= C_1(k) \exp(i(kx - bz)), \\ \varphi_1(x, z) &= (C_2(k) \cos az + C_3(k) \sin az) \exp(ikx), \\ \psi(x, z) &= C_4(k) \exp(i(kx - cz)),\end{aligned}\tag{4}$$

$k$  – волновое число,  $a = \sqrt{k_o^2 - k^2}$ ,  $b = \sqrt{k_l^2 - k^2}$ ,  $c = \sqrt{k_t^2 - k^2}$ .

Подставляя решения (4) в систему (2) с учетом соотношений (3), получим однородную систему уравнений

$$\begin{cases} C_2 \cos ah + C_3 \sin ah = 0, \\ ibC_1 + aC_3 - ikC_4 = 0, \\ 2bkC_1 + (k_t^2 - 2k^2)C_4 = 0, \\ \rho_1(2k^2 - k_t^2)C_1 + k_t^2C_2 + 2\rho_1ckC_4 = 0, \\ \rho_1 = \rho_0 / \rho. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Отсюда получим дисперсионное уравнение для волновода с твердым дном.

$$k^4 b \sin ah + i\rho_1 a \cos ah (4bck^2 + (2k^2 - k_t^2)^2) = 0.$$

Устремляя  $c_t$  к нулю, получим дисперсионное уравнение для волновода с жидким дном:

$$b \sin ah + i\rho_1 a \cos ah = 0. \quad (6)$$

Выбор ветви радикала  $a$  произволен, поскольку он не дает многозначности в полученных выражениях. Ветви радикалов  $b$  и  $c$  выбираются из условий  $\text{Im} b > 0, \text{Im} c > 0$ .

Рассмотрим дисперсионное уравнение (6) для волновода с жидким дном. Оно имеет простые корни  $k = \pm k_0$ , совпадающие с точками ветвления радикала  $a$ .

Характеристическая функция дисперсионного уравнения является двухзначной. Для того чтобы сделать ее однозначной, образуем двулистную поверхность Римана, проведя разрезы, как показано на рис. 1. Уравнения разрезов  $\text{Im} b = 0$ , уравнения продолжений разрезов  $\text{Re} b = 0$ . Разрезы изображены сплошной линией, а продолжения разрезов – штриховой. Для наглядности на рисунке учтены собственные потери. Будем считать, что на верхнем листе  $\text{Im} b > 0$ , а на нижнем –  $\text{Im} b < 0$ . На рис. 1 указаны также знаки  $\text{Re} b$  по координатным четвертям для верхнего листа; для нижнего листа знаки противоположны.

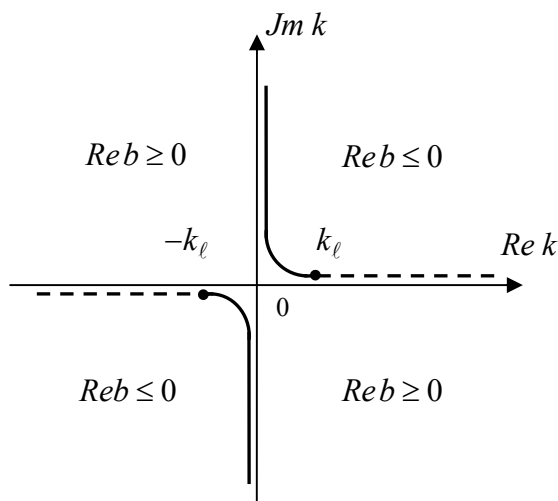


Рис. 1. Комплексная плоскость волновых чисел  
Fig. 1. Complex plane of wave numbers

Для составления компьютерной программы и расчета дисперсионных зависимостей необходимо знать, на каком листе двулистной поверхности Римана расположены комплексные корни дисперсионного уравнения. Анализ корней дисперсионного уравнения в комплексной

плоскости  $k$  затруднителен. Поэтому выполним анализ в комплексной плоскости  $\eta$ , а затем вернемся в плоскость  $k$ .

$$\eta = \sqrt{k_o^2 - k^2} h,$$

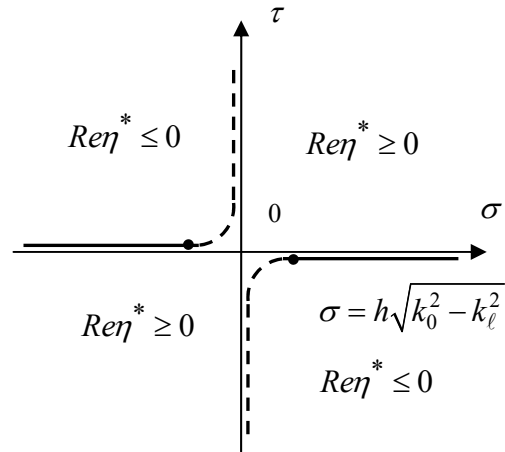
тогда 
$$b = \sqrt{\eta^2 - h^2(k_o^2 - k_l^2)} / h = \eta^* / h, \quad \eta^* = \sqrt{\eta^2 - h^2(k_o^2 - k_l^2)}.$$

Уравнение (6) преобразуем к виду

$$\eta^* = -i\eta\rho_1 \operatorname{ctg}\eta. \quad (7)$$

Полагаем  $\eta = \sigma + i\tau$ . Комплексная плоскость  $\eta$  изображена на рис. 2 (рисунок выполнен для случая  $c_l > c_o$ ). Уравнения разрывов  $\operatorname{Im}\eta^* = 0$ , уравнения продолжений разрывов  $\operatorname{Re}\eta^* = 0$ . На рис. 2 указаны также знаки  $\operatorname{Re}\eta^*$  для верхнего листа ( $\operatorname{Im}\eta^* > 0$ ).

Рис. 2. Комплексная плоскость  $\eta$   
Fig. 2. Complex plane  $\eta$



Разделяя действительную и мнимую части в уравнении (7), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\eta^* &= \frac{\rho_1(\tau \sin 2\sigma - \sigma sh 2\tau)}{2(\sin^2 \sigma + sh^2 \tau)}, \\ \operatorname{Im}\eta^* &= \frac{-\rho_1(\sigma \sin 2\sigma + \tau sh 2\tau)}{2(\sin^2 \sigma + sh^2 \tau)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим расположение комплексных корней по четвертям. На верхнем листе в первой четверти  $\operatorname{Im}\eta^* > 0$ ,  $\operatorname{Re}\eta^* > 0$ . Из системы (8) получим

$$\begin{cases} \tau \sin 2\sigma - \sigma sh 2\tau > 0, \\ \sigma \sin 2\sigma + \tau sh 2\tau < 0. \end{cases} \quad (9)$$

В первой четверти  $\sigma > 0$ ,  $\tau > 0$ ,  $sh 2\tau > 0$ . При этих значениях  $\sigma$  и  $\tau$  система (9) несовместна, а следовательно, в первой четверти на верхнем листе нет комплексных корней. Аналогично рассмотрев три другие четверти, приходим к тому же выводу. Таким образом, ни в одной из четвертей верхнего листа нет комплексных корней.

Для нижнего листа в первой четверти  $\text{Im}\eta^* < 0, \text{Re}\eta^* < 0$ . Имеем систему

$$\begin{cases} \sigma \sin 2\sigma > -\tau sh 2\tau, \\ \tau \sin 2\sigma < \sigma sh 2\tau. \end{cases} \quad (10)$$

Система (10) имеет решения, следовательно, на нижнем листе в первой четверти есть комплексные корни. Аналогичная ситуация получается и для остальных четвертей.

Таким образом, все комплексные корни уравнения (7), а следовательно, и уравнения (6) расположены на нижнем листе; на этом листе  $\text{Im}b < 0$ . При решении задачи с точечным источником звука в волноводе эти корни будут задеты при вычислении поля боковой волны, которое определяется интегралом по берегам разреза, при деформировании контура интегрирования для вычисления интеграла асимптотическими методами. Итак, все комплексные корни соответствуют «квази модам», дающим нарастающее, но ограниченное поле при удалении от границы раздела.

Численные результаты представлены графиками частотных зависимостей (дисперсионными кривыми) действительной и мнимой составляющих безразмерного волнового числа для волновода с твердым дном – рис. 3. Действительная часть волнового числа изображена сплошной линией, а мнимая – штриховой; номера мод обозначены цифрами. Отношение плотности грунта к плотности жидкости равно 1,6.

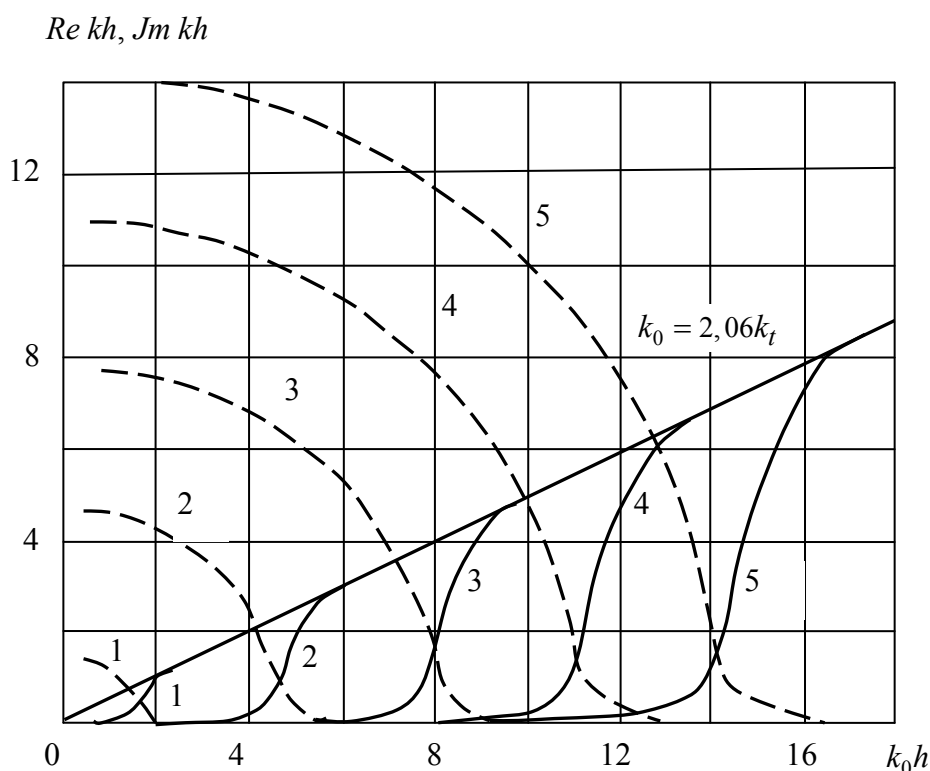


Рис. 3. Дисперсионные кривые безразмерного волнового числа для однородного волновода с твердым дном ( $c_l / c_o = 3,51, c_t / c_o = 2,06$ )

Fig. 3. The dispersion curves of the dimensionless wave number for homogeneous waveguide with a solid bottom ( $c_l / c_o = 3,51, c_t / c_o = 2,06$ )

В заключение отметим, что последние достижения в акустике слоистых сред с учетом обобщенных волн изложены в монографиях [5, 6].

### Список литературы

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 344 с.
2. Завадский В.Ю. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. – М.: Наука, 1972. – 558 с.
3. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Теория упругости. – М.: Наука, 1965. – Т. 7. – 203 с.
5. Касаткин Б.А., Злобина Н.В. Некорректные задачи и обобщенные волны в акустике слоистых сред. – Владивосток: Дальнаука, 2005. – 406 с.
6. Касаткин Б.А., Злобина Н.В. Корректная постановка граничных задач в акустике слоистых сред. – М.: Наука, 2009. – 496 с.

**Сведения об авторах:** Балабаев Сергей Михайлович,  
доктор физико-математических наук, профессор;  
Ивина Наталья Федоровна, доктор технических наук, доцент.