УДК 519.22./25

Т.А. Рыжкина, З.П. Старовойтова
Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет,
690087, г. Владивосток, ул. Луговая, 52б

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОГО «БЕЛОГО ШУМА» С ОПРЕДЕЛЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ ВЫХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

На примере процесса, называемого «белым шумом», обсуждаются методы, приемы, на основании которых сложные по своей природе реальные процессы описываются достаточно простыми моделями с возможностью воспроизводства данных в условиях одного испытания. Такая модель как авторегрессия с определенными параметрами позволяет на выходе получать требуемые свойства.

Ключевые слова: *стационарность, авторегрессия, имитация случайной последовательности.*

T.A. Ryzhkina, Z.P. Starovoytova

TRANSFORMATIONS OF FLAT WHITE NOISE WITH CERTAIN PROPERTIES OF TARGET CHARACTERISTICS

In work on an example of the process called by white noise, methods, receptions on the basis of which real processes difficult by the nature are described by rather simple models with possibility of reproduction of data in the conditions of one test are discussed. Such model autoregression with certain parameters allows to receive demanded properties on an exit.

Key words: *statsionarnost, autoregression, imitation of casual sequence.*

Введение

Объектами исследования служат стохастические процессы и их реализации в виде временных рядов.

Набор случайных переменных $X(t)$, где t – время (в общем случае – подмножество или множество действительных чисел), называется стохастическим процессом.

В работе не делается различия между стохастическим процессом $X(t)$ и порожденным с его помощью временным рядом, если процесс обладает свойством стационарности, хотя бы в слабом смысле.

Статистико-математический анализ различных процессов предполагает, прежде всего, получение информации о развитии процесса в настоящий момент, предсказание показателей процесса в течение кратковременного периода с учетом преемственности данных и степени их влияния на процесс. Интерес в данной работе представляют стохастические эргодические стационарные процессы, а также направленные процессы без циклов, имеющие случайные остатки в виде стационарного «белого шума», в частности гауссовского «белого шума».

1. Цель исследования. Необходимые сведения из теории стационарных стохастических процессов

Целью данной работы является разработка достаточно устойчивой статистики. На ее основе требуется имитировать одномерный стохастический процесс – плоский белый шум. Такую модель можно проиграть во времени в виде одного испытания. На базе созданного случайного поля с помощью авторегрессионных моделей (преобразователей) следует получить аппроксимацию рассматриваемого явления с меньшим числом параметров и с более простыми свойствами.

Применяется метод имитационного моделирования. Он позволяет строить модели, описывающие процессы так, как они проходили в действительности. Изучаемый реальный объект заменяется моделью с достаточной степенью точности его описания. Экспериментирование с моделью называют имитацией [1].

1.1. Некоторые общие понятия, определения, известные результаты, необходимые в исследовании

Основные теоретические характеристики процесса $X(t)$ и аппроксимирующие их выборочные характеристики определяются следующим образом.

Математическим ожиданием $X(t)$ называют неслучайную функцию $m_x(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента t равно математическому ожиданию сечения $X(t)$, соответствующего этому же фиксированному значению аргумента:

$$m_x(t) = M[X(t)].$$

Для генерации случайных чисел (элементов временного ряда) к фиксированному моменту t роль $m_x(t)$ исполняет средняя постоянная величина как несмещенная, состоятельная оценка математического ожидания процесса.

Дисперсией $X(t)$ называют неслучайную неотрицательную функцию $D_x(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента t равно дисперсии сечения процесса, соответствующего этому же фиксированному значению аргумента:

$$D_x(t) = D[X(t)].$$

Выборочная дисперсия для выделенного отрезка временного ряда служит состоятельным аналогом $D_x(t)$.

Средним квадратическим отклонением процесса $X(t)$ называют квадратный корень из дисперсии $D_x(t)$:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение $\boldsymbol{\sigma}$, найденное для соответствующей процессу $X(t)$ генерации $x(t)$, является эффективной оценкой среднего квадратического отклонения процесса $X(t)$.

Корреляционной или автоковариационной функцией процесса $X(t)$ называют неслучайную функцию $K_x(t_1, t_2)$ двух независимых аргументов t_1 и t_2, значение которой при каждой паре фиксированных значений аргументов равно корреляционному моменту центрированных сечений процесса $X(t)$, соответствующих этим же фиксированным значениям аргументов:

$$K_x(t_1, t_2) = M[\overset{o}{X}(t_1) \cdot \overset{o}{X}(t_2)].$$

Реализации центрированного $X(t)$ представляют собой отклонения процесса $X(t)$ от его математического ожидания; эти отклонения имеют как положительные, так и отрицательные значения, а в среднем равны нулю. Иногда для удобства рассуждений рассматривают стандартизованные, центрированные случайные функции с характеристиками $m_x(t) = 0$, $\sigma(t) = 1$ ввиду простого перехода к исходным значениям.

Стационарным процессом в слабом смысле называют стохастический процесс, для которого среднее и дисперсия независимо от рассматриваемого периода времени имеют постоянное значение. Автоковариация зависит только от длины лага $\tau = t_1 - t_2$ между рассматриваемыми переменными t_1, t_2. С физической точки зрения такой процесс представляет колебания относительно некоторого постоянного значения, а стохастическая зависимость между двумя сечениями регулируется только расстоянием между ними.

Понятие «эргодичность» делает возможным оценивание характеристик стохастического процесса только по одной его достаточно длинной реализации – временному ряду. **Достаточным условием для эргодичности стационарного *X*(*t*)** по математическому ожиданию и автоковариации является сходимость автоковариации $K_x(\tau)$ к нулю при $\tau \to \infty$, [1-5]. Очевидно, что дисперсия также стремится к нулю.

Процесс, называемый стационарным «белым шумом», – чисто случайный процесс, т.е. ряд одинаково распределенных случайных величин, характеризующийся постоянной средней величиной, постоянной дисперсией ошибки, некоррелированными значениями ряда, $K_x(t_1, t_2) = 0$, $t_1 \neq t_2$ [1-3]. Это своего рода абстракция.

«Белый шум» можно представить как предельный случай последовательности очень коротких импульсов, амплитуда которых представляет собой независимые случайные величины с очень большой дисперсией, при этом отношение дисперсии этих импульсов к частоте их появления является постоянной конечной величиной [1, 4]. На практике такими процессами могут быть естественные помехи в каналах связи, «тепловые шумы», колебания плотности физических сред и др.

Под **гауссовским «белым шумом»** в данной работе будем понимать нормальный стохастический процесс как совместное нормальное распределение двух его разных сечений.

Можно доказать, что стационарный «белый шум», представляющий собой систему одинаково распределенных нормальных, независимых случайных величин, не является нормальным. Действительно, по закону совместного распределения двух разных сечений этого процесса следует, что сечения, имеющие вероятность, отличную от нуля, совпадают. Это противоречит определению нормального процесса. Вероятность равенства двух случайных величин по нормальному закону равна нулю. Однако стационарность в слабом смысле у этого процесса имеется [1-9].

Плотность распределения дисперсий по частотам непрерывного спектра стационарного процесса называется его спектральной плотностью. Это функция вида

$$S_x(\omega) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{D_k}{\Delta\omega}.$$

Корреляционная функция и спектральная плотность стационарного *X*(*t*) связаны друг с другом прямым и обратным преобразованиями Фурье [4-9]. В экспоненциальном виде эти формулы имеют вид

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \qquad S_x(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Спектральная плотность так называемого «белого шума» постоянна. Ее обычно полагают равной константе в определенном диапазоне частот. Обозначим эту постоянную символом q. Коэффициент $2\pi q$ называют интенсивностью частот. Корреляционную функцию определяют с помощью δ-функции:

$$K_x(\tau) = 2\pi q \delta(\tau),$$

где

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \neq 0 \\ +\infty, & \tau = 0. \end{cases}$$

2. Имитация плоского «белого шума»

Итак, скалярный процесс $X(t)$ называют «белым шумом», если он является стационарным и обладает постоянной спектральной плотностью. Неслучайные частоты не коррелируются [4, 9].

В основе всех методов и приемов моделирования различных факторов и ситуаций (событий, систем случайных величин и пр.) лежит использование случайных чисел [8, 10], равномерно распределенных на интервале [0; 1].

Вместо физического генератора, способного выдавать длительное время случайные числа r указанного качества, используется генератор псевдослучайных чисел (ПСЧ). Последовательность ПСЧ получается с помощью детерминированных рекуррентных формул. ПСЧ, несмотря на случайность и равномерность распределения, остаются полностью детерминированными.

Это позволяет воспроизводить последовательность ПСЧ с одними и теми же исходными данными. Например:

$$m_r = \frac{1}{2}; \quad \sigma_r = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

В центре наблюдений предполагается, что $r \in (m_r - \alpha\sigma_r;\, m_r + \alpha\sigma_r)$, где $\alpha = \alpha(n)$ – функция от номера статистического испытания (например, $\alpha = \frac{3}{2n}$).

Цикл генератора ПСЧ – интервал по номеру $n \in [-15;15]$. Розыгрыш номеров и самих чисел r проводится из интервала

$$\left(0{,}5 - \frac{3}{4\mathrm{n}\sqrt{3}}; 0{,}5 + \frac{3}{4\mathrm{n}\sqrt{3}}\right).$$

Последовательность $\alpha(n)$ с учетом знака по циклу генератора представлена в табл. 1.

Таблица 1

Последовательность $\alpha(n)$ с учетом знака по циклу генератора

Table 1

Sequence $\alpha(n)$ taking into account a sign on a generator cycle

n	$sign(n) \cdot \alpha(n)$	n	$sign(n) \cdot \alpha(n)$
1	-0,433013	-15	0,0288675
2	-0,216506	-14	0,0309295
3	-0,144338	-13	0,0333087
4	-0,108253	-12	0,0360844
5	-0,0866025	-11	0,0393648
6	-0,0721688	-10	0,0433013
7	-0,061859	-9	0,0481125
8	-0,0541266	-8	0,0541266
9	-0,0481125	-7	0,061859
10	-0,0433013	-6	0,0721688
11	-0,0393648	-5	0,0866025
12	-0,0360844	-4	0,108253
13	-0,0333087	-3	0,144338
14	-0,0309295	-2	0,216506
15	-0,0288675	-1	0,433013

Последовательность ПСЧ – это ряд случайных чисел, вычисляемых по формуле

$$r_k = 0{,}5 + sign(n) \cdot \alpha(n), \quad n \in [-15;15]. \tag{1}$$

Рассмотрим случайную величину ε_t, имеющую нормальное распределение,

$$\varepsilon_t \sim N(0;\ 1).$$

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon_t^2}{2}}; \quad F(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\varepsilon_t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad F(\varepsilon) = p(\varepsilon_t < \varepsilon_r) = r. \tag{2}$$

Система уравнений (2) для чисел $\boldsymbol{r_k}$ принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\varepsilon_{rk}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = r_k.$$

С учетом того, что $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0{,}5$, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\varepsilon_{rk}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = r_k - 0{,}5, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{r_k}$ – генерация ПСЧ (1) из интервала (0; 1). Ряд случайных чисел ε_{rk} составляет предмет рассмотрения.

Вычислительные процедуры в статистическом пакете по формуле (3) связаны с обратным преобразованием к функции Лапласа [6-8].

Разыграна ситуация $\varepsilon_{rk} = X(t)$, представленная табл. 2.

Числовые характеристики:

$$m_{\text{t}} = \frac{\sum_{t=1}^{30} X_t}{30} = 0, \qquad \sigma_t^2 = \left(\frac{\sum_{t=1}^{30} X_t^2}{30} \right) - m^2 = 0{,}198, \qquad \sigma_t = \sqrt{\sigma_t^2} = 0{,}445.$$

Для проверки стационарности данного ряда был проведен расчет выборочного коэффициента автокорреляции (нормированной автоковариации) ρ_τ по формуле

$$\rho_\tau = \frac{(n-\tau)\sum_{t=1}^{n-\tau} x_t x_{t+\tau} - \sum_{t=1}^{n-\tau} x_t \sum_{t=1}^{n-\tau} x_{t+\tau}}{\sqrt{(n-\tau)\sum_{t=1}^{n-\tau} x_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-\tau} x_t\right)^2} \sqrt{(n-\tau)\sum_{t=1}^{n-\tau} x_{t+\tau}^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-\tau} x_{t+\tau}\right)^2}}. \tag{4}$$

Результаты: $\rho_1 = 0{,}787504$, $\rho_2 = 0{,}652205$, $\rho_3 = 0{,}573963$, $\rho_4 = 0{,}525558$, $\rho_5 = 0{,}494783$, $\rho_6 = 0{,}475492$, $\rho_7 = 0{,}464256$.

Таблица 2

Случайная последовательность нормально распределенных чисел

Table 2

Casual sequence of normally distributed numbers

t	X_t	t	X_t
1	-1,49861	16	0,0724234
2	-0,572494	17	0,0776065
3	-0,370077	18	0,0835897
4	-0,274769	19	0,0905738
5	-0,218814	20	0,0988336
6	-0,181898	21	0,108754
7	-0,155684	22	0,120894
8	-0,136094	23	0,136094
9	-0,120894	24	0,155684
10	-0,108754	25	0,181898
11	-0,0988336	26	0,218814
12	-0,0905738	27	0,274769
13	-0,0835897	28	0,370077
14	-0,0776065	29	0,572494
15	-0,0724234	30	1,49861

Очевидно, что связь между уровнями ряда постепенно ослабевает, т.е. подтверждается признак стационарного временного ряда. С увеличением лага τ взаимосвязь членов временного ряда x_t и x_{t+1} ослабевает и автокорреляционная функция $\rho(\tau)$ должна убывать (по абсолютной величине). Дисперсия ошибки мала, имеет порядок (-1). Ряд представляет случайные колебания относительно нулевого уровня (рис. 1).

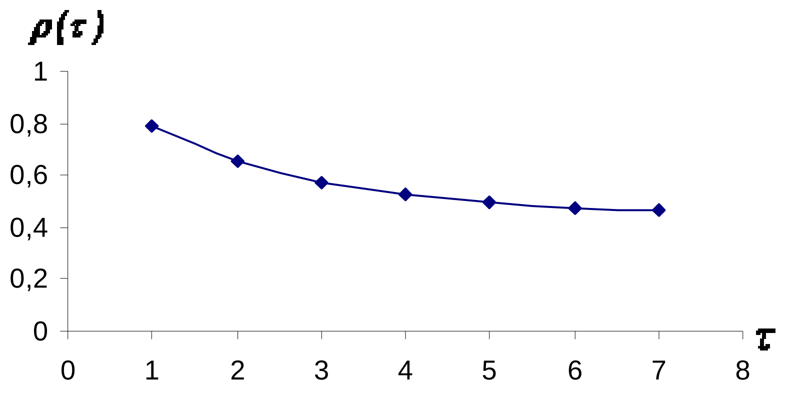

Рис. 1. График нормированной автоковариации $\rho(\tau)$
Fig. 1. Schedule of normirovanny autocovariance $\rho(\tau)$

На основании случайной выборки из массива ПСЧ [8, приложение] получены еще пять случайных последовательностей нормально распределенных чисел. Последовательности ПСЧ получаем по равномерному распределению с теми же числовыми характеристиками.

Полученные примеры представлены в табл. 3-6.

Таблица 3

Второй пример случайной последовательности нормально распределенных чисел

Table 3

The 2nd example of casual sequence of normally distributed numbers

r_k	ε_{r_k}	r_k	ε_{r_k}
0,0669873	-1,49861	0,528868	0,0724234
0,283494	-0,572494	0,530929	0,0776065
0,355662	-0,370077	0,533309	0,0835897
0,391747	-0,274769	0,536084	0,0905738
0,413397	-0,218814	0,539365	0,0988336
0,427831	-0,181898	0,543301	0,108754
0,438141	-0,155684	0,548113	0,120894
0,445873	-0,136094	0,554127	0,136094
0,451887	-0,120894	0,561859	0,155684
0,456699	-0,108754	0,572169	0,181898
0,460635	-0,0988336	0.586603	0,218814
0,463916	-0,0905738	0,608253	0,274769
0,466691	-0,0835897	0,644338	0,370077
0,469071	-0,0776065	0,716506	0,572494
0,471132	-0,0724234	0,933013	1,49861

Числовые характеристики этого ряда:

математическое ожидание $m_x = 0$, дисперсия $\sigma_x^2 = 0{,}198162$,

коэффициенты корреляции $\rho_1 = 0{,}482811$, $\rho_2 = 0{,}350661$, $\rho_3 = 0{,}282033$, $\rho_4 = 0{,}238215$, $\rho_5 = 0{,}206754$, $\rho_6 = 0{,}182157$, $\rho_7 = 0{,}161471$; ...

Таблица 4

Третий пример случайной последовательности нормально распределенных чисел

Table 4

The 3rd example of casual sequence of normally distributed numbers

r_k	ε_{r_k}	r_k	ε_{r_k}
0,355662	-0,370077	0,509623	0,0241224
0,427831	-0,181898	0,51031	0,0258458
0,451887	-0,120894	0,511103	0,0278344
0,463916	-0,0905738	0,512028	0,0301546
0,471132	-0,0724234	0,513122	0,0328969
0,475944	-0,0603367	0,514434	0,036188
0,47938	-0,0517088	0,516038	0,0402109
0,481958	-0,0452405	0,518042	0,0452405
0,483962	-0,0402109	0,52062	0,0517088
0,485566	-0,036188	0,524056	0,0603367
0,486878	-0,0328969	0,528868	0,0724234
0,487972	-0,0301546	0,536084	0,0905738
0,488897	-0,0278344	0,548113	0,120894
0,48969	-0,0258458	0,572169	0,181898
0,490377	-0,0241224	0,644338	0,370077

Числовые характеристики ряда 3:

математическое ожидание $m_x = -1{,}4803 \times 10^{-17}$, дисперсия $\sigma_x^2 =$ 0,0142275,

коэффициенты корреляции $\rho_1 = 0{,}60104$, $\rho_2 = 0{,}450757$, $\rho_3 = 0{,}367182$, $\rho_4 = 0{,}311902$, $\rho_5 = 0{,}271152$, $\rho_6 = 0{,}238519$, $\rho_7 = 0{,}210412; \ldots$

Таблица 5

Четвертый пример случайной последовательности нормально распределенных чисел

Table 5

The 4th example of casual sequence of normally distributed numbers

r_k	ε_{r_k}	r_k	ε_{r_k}
-0,378807	-1,16904	0,0252538	0,0633443
-0,189404	-0,494161	0,0270577	0,0678756
-0,126269	-0,321988	0,029139	0,0731057
-0,0947018	-0,239657	0,0315673	0,0792102
-0,0757614	-0,191062	0,034437	0,0864283
-0,0631345	-0,158921	0,0378807	0,095096
-0,0541153	-0,136066	0,0420897	0,1057
-0,0473509	-0,118971	0,0473509	0,118971
-0,0420897	-0,1057	0,0541153	0,136066
-0,0378807	-0,095096	0,0631345	0,158921
-0,034437	-0,0864283	0,0757614	0,191062
-0,0315673	-0,0792102	0,0947018	0,239657
-0,029139	-0,0731057	0,126269	0,321988
-0,0270577	-0,0678756	0,189404	0,494161
-0,0252538	-0,0633443	0,378807	1,16904

Числовые характеристики ряда 4:

математическое ожидание $m_x = 0$, дисперсия $\sigma_x^2 =$ 0.127622,

коэффициенты корреляции $\rho_1 =$ 0,28869, $\rho_2 =$ 0,388284, $\rho_3 =$ 0,313652, $\rho_4 =$ 0,265439, $\rho_5 =$ 0,230505, $\rho_6 = 0{,}202957$, $\rho_7 = 0{,}179582; \ldots$

Таблица 6

Пятый пример случайной последовательности нормально распределенных чисел

Table 6

The 5th example of casual sequence of normally distributed numbers

r_k	ε_{r_k}	r_k	ε_{r_k}
1	2	3	4
-0,057735	-0,145229	0,003849	0,00964817
-0,0288675	-0,0724234	0,00412393	0,0103373
-0,019245	-0,0482588	0,00444116	0,0111326
-0,0144338	-0,036188	0,00481125	0,0120603
-0,011547	-0,0289481	0,00524864	0,0131568
-0,0096225	-0,0241224	0,0057735	0,0144725
-0,00824786	-0,0206758	0,006415	0,0160807

Окончание табл. 6

1	2	3	4
-0,00721688	-0,018091	0,00721688	0,018091
-0,006415	-0,0160807	0,00824786	0,0206758
-0,0057735	-0,0144725	0,0096225	0,0241224
-0,00524864	-0,0131568	0,011547	0,0289481
-0,00481125	-0,0120603	0,0144338	0,036188
-0,00444116	-0,0111326	0,019245	0,0482588
-0,00412393	-0,0103373	0,0288675	0,0724234
-0,003849	-0,00964817	0,057735	0,145229

Числовые характеристики ряда 5:

математическое ожидание $m_x = -2{,}03541\times10^{-17}$, дисперсия $\sigma_x^2 = 0{,}00221735$,

коэффициенты корреляции $\rho_1 = 0{,}608162$, $\rho_2 = 0{,}457223$, $\rho_3 = 0{,}372812$, $\rho_4 = 0{,}316821$, $\rho_5 = 0{,}275465$, $\rho_6 = 0{,}242291$, $\rho_7 = 0{,}213671$;...

Проведем усреднение последних четырех реализаций по формуле математического ожидания случайного процесса

$$M_x(t) = \sum_{k=1}^{4} p_k(t)\cdot X_k(t),$$

где $t = 1,2,...,30$.

Получаем усредненный ряд, представленный в табл. 7.

Таблица 7

Результат усреднения

Table 7

Result of averaging

t	ε_{r_k}	t	ε_{r_k}
1	0,201699	16	0,000716223
2	0,041854	17	0,000822272
3	0,0181913	18	0,000953753
4	0,0101577	19	0,0011195
5	0,00647937	20	0,00133255
6	0,00449153	21	0,00161279
7	0,00329637	22	0,00199177
8	0,00252203	23	0,00252203
9	0,00199177	24	0,00329637
10	0,00161279	25	0,00449153
11	0,00133255	26	0,00647937
12	0,0011195	27	0,0101577
13	0,000953753	28	0,0181913
14	0,000822272	29	0,041854
15	0,000716223	30	0,201699

Числовые характеристики этого ряда:

математическое ожидание $m_x = 0.019816$, дисперсия $\sigma_x^2 = 0.00247128$,

коэффициенты корреляции $\rho_1 = 0{,}207378$, $\rho_2 = 0{,}0824471$, $\rho_3 = 0{,}0354722$, $\rho_4 = 0{,}0101516$, $\rho_5 = 0{,}00704812$.

Представим графически последние пять реализаций (рис. 2).

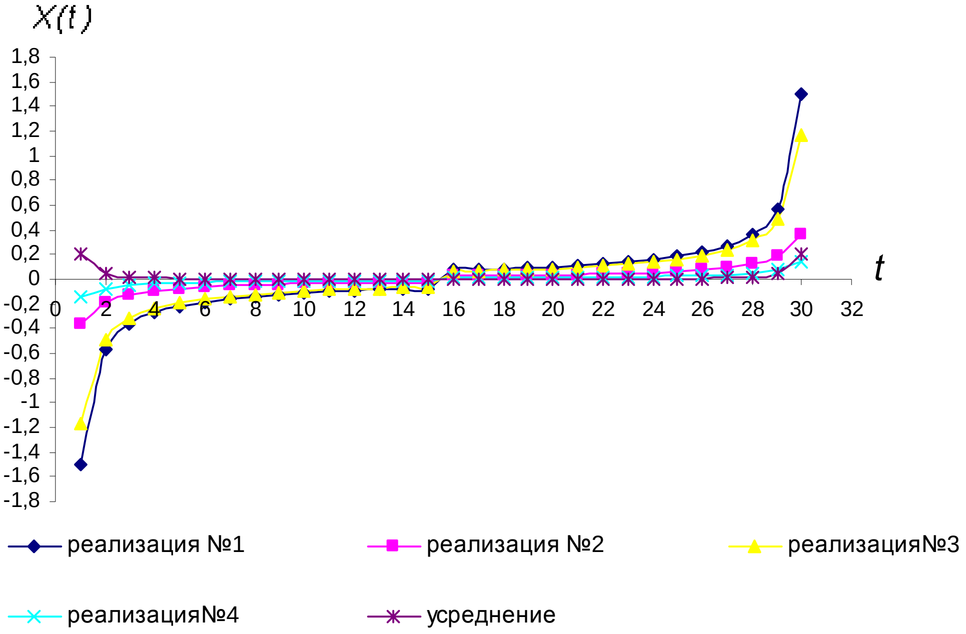

Рис. 2. Графическое представление стационарных рядов
Fig. 2. Graphic representation of stationary ranks

3. Создание устойчивого линейного фильтра для системы *X*(*t*)

Линейные преобразователи стационарных процессов наиболее полно изучены с помощью механизма передаточных функций, $\rho(\tau)$ характеристических уравнений для авторегрессионных моделей, их корней, в частности, кратных корней [1].

Сложная природа полученного случайного поля может быть выражена через другую переменную с более простыми свойствами. Поведение исследуемого процесса аппроксимируется на основе текущего значения и одного или двух прошлых значений процесса. В этом суть преобразований, иными словами, адаптации явления к текущему моменту.

Одномерная модель авторегрессии длины m имеет вид

$$x_t = \alpha_0 + \sum_{\tau=1}^{m} \alpha_t x_{t-\tau} \quad + \beta\varepsilon_t \quad , t = 1,\dots,n. \tag{5}$$

Оператор лага L^τ, или оператор обратного действия, выполняет в модели (5) роль, подобную той, что оператор $\dfrac{d^k}{dx^k}$ выполняет в однородном линейном дифференциальном уравнении *n*-го порядка. Аппарат характеристических уравнений для однородных дифференциальных уравнений *n*-го порядка позволяет получить любое решение таких уравнений. Разработана доказательная база возможности использования отмеченной аналогии в деле построения авторегрессии. К ней также применимо понятие характеристического уравнения. В зависимости от корней характеристического уравнения авторегрессионной модели (они по абсолютной величине должны быть больше единицы) адаптивный механизм может сохранять свойство стационарности преобразуемого процесса, в том числе уменьшать дисперсию ошибки. В противном случае, когда имеются корни характеристического уравнения модели (5), меньшие единицы по модулю, аппроксимирующий процесс перестает быть устойчивым, теряет свойство стационарности.

Выполним приближение текущих значений x_t первого ряда с помощью ранних значений $x_{t-\tau}$. Для этого используем авторегрессию первого порядка:

$$\hat{x}_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}. \tag{6}$$

По построению случайной последовательности ошибка от использования формулы (6) не коррелируется с x_{t-1}, т.е. будем считать, что дисперсия ошибки случайной составляющей для (6) однородная. С помощью математического пакета находим

$$\alpha_0 = 0{,}0923715, \qquad \alpha_1 = 0{,}787504.$$

Составим характеристическое уравнение $1 - \alpha_0 - \alpha_1 \cdot z = 0$. Его корень $z = 1{,}15254$. По модулю он больше 1. Это означает, что полученная модель авторегрессии представляет устойчивый фильтр для рассматриваемой реализации по отношению к стационарности. Следовательно, предыдущие значения случайного ряда практически не влияют на текущие значения.

Для авторегрессии второго и третьего порядков

$$\hat{x}_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2}, \qquad \hat{x}_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \alpha_3 x_{t-3}$$

выполняются аналогичные процедуры в математическом пакете. По найденным коэффициентам получаем корни характеристического уравнения: $z_1 = 0{,}538901$, $z_2 = 2{,}9021$ для второго порядка и $z_1 = 0{,}387588$, $z_2 = 1{,}28363$, $z_3 = 11{,}0376$ для третьего порядка соответственно, что говорит о неустойчивости процесса на выходе.

Рассмотрим шестой пример реализации эргодического стационарного процесса. Представим текущие значения данного ряда в виде линейного потока предыдущих значений, воспользовавшись авторегрессионной моделью первого порядка:

$$x_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{7}$$

Коэффициенты α_0, α_1 формулы (7) следующие: $\alpha_0 = 0{,}0088883$, $\alpha_1 = 0{,}343755$.

Авторегрессионная модель имеет вид $x_t = 0{,}0088883 + 0{,}343755 x_{t-1} + \varepsilon_t$.

Построим для этой модели характеристическое уравнение

$$1 - 0{,}0088883 - 0{,}343755 \cdot z = 0.$$

Его корень $z = 2{,}88319$.

Поскольку корень лежит вне единичного круга с центром в нуле, то это говорит о стационарности данной модели.

Выходные числовые характеристики для этой модели:

математическое ожидание $m_x = 0{,}0135442$, дисперсия $\sigma_x^2 = 0{,}000162649$, коэффициенты автокорреляции $\rho_1 = 0{,}217821$, $\rho_2 = 0{,}090791$, $\rho_3 = 0{,}0427131$, $\rho_4 = 0{,}0170847$, $\rho_5 = 0{,}0000651894$. С увеличением лага τ коэффициент автокорреляции ρ_τ убывает по абсолютной величине.

В рассматриваемых вариантах для проверки стационарности процесса достаточно анализа семи значений коэффициента автокорреляции [1, 3, 4].

Модели авторегрессии более высокого порядка могут обеспечивать процесс на выходе с не худшими характеристиками в случае кратных корней характеристического уравнения.

Заключение

Приведенные примеры создания случайных полей и построения адаптивных механизмов аппроксимации на их основе показывают эффективность статистико-математического анализа, математического моделирования в решении прикладных задач, связанных с получением желаемых физических характеристик. Алгоритмы построения и вычислительные процедуры разработаны авторами работы. В частности, примеры показывают, что при тех же исходных условиях одного статистического испытания можем воспроизводить разные случайные числовые последовательности с одинаковыми свойствами.

Список литературы

1. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов: учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 416 с.

2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2000. – 383 с.

3. Эконометрика: учебник / И.И. Елисеева, С.В. Курышева, Т.В. Костеева и др.; под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 576 с.

4. Хрущева И.В., Щербаков В.И., Леванова Д.С. Основы математической статистики и теории случайных процессов: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2009. –336 с.

5. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций: учеб. пособие / под общ. ред. А.А. Свешникова. – СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 448 с.

6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1999. – 575 с.

7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1972. – 368 с.

8. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики: учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1971. – 328 с.

9. Сборник задач по математике. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / под ред. А.В. Ефимова. – М.: Наука, 1990. – 428 с.

10. Эконометрика: учебник / под ред. В.Б. Уткина. – М.: Изд-во «Дашков и К°», 2009. – 564 с.

Сведения об авторах: Рыжкина Тамара Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент;

Старовойтова Зоя Павловна, доцент.