УДК 534.231.1

С.М. Балабаев
Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет,
690087, г. Владивосток, ул. Луговая, 52б

РАСЧЕТ ИМПУЛЬСНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В СИСТЕМЕ УПРУГИЙ СЛОЙ – ЖИДКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Методом интегральных преобразований решена осесимметричная задача о возбуждении импульсных акустических полей в системе упругий слой – жидкое полупространство. Применено преобразование Фурье по временной переменной и преобразование Бесселя по пространственной переменной. Решения для потенциалов смещения волновых полей получены в виде двукратных интегралов. Обсуждены методы вычисления полученных интегралов.

Ключевые слова: *импульсные акустические поля, метод интегральных преобразований, дисперсионные уравнения.*

S.M. Balabaev

CALCULATION OF THE IMPULSIVE ACOUSTIC FIELDS IN THE SYSTEM AN ELASTIC LAYER – LIQUID HALF-SPACE

The method of integral transformations is used to solve an axisymmetrical problem about excitation of the impulsive acoustic fields in the system an elastic layer – liquid half-space. Transformation of Fourier on a temporal variable and transformation of Bessel on a spatial variable are applied. Decision for potentials of displacement of the wave fields got as double integrals. The methods of calculation of the got integrals are discussed.

Key words: *impulsive acoustic fields, method of integral transformations, dispersion equations.*

При решении ряда практических задач возникает необходимость расчета волновых импульсных полей в системе *упругий слой – жидкое полупространство*. Подобная ситуация имеет место в акустическом методе неразрушающего контроля металлических листов (или труб большого диаметра), находящихся в одностороннем контакте с жидкостью. Одним из вариантов этой задачи является также анализ системы *лед – вода* при импульсном воздействии на поверхность льда. Измерения скорости и формы акустических импульсов дают полезную информацию о прочностных характеристиках льда. Это важно, например, при выборе места для ледовых аэродромов, дрейфующих полярных станций и т. д.

Рассмотрим осесимметричную задачу в цилиндрических координатах r, α, z. Слой толщиной $2l$ ограничен координатными поверхностями $z = \pm l$. На конечном участке верхней поверхности слоя задано внешнее воздействие $\sigma_{zz}(r, -l, t) = \sigma(r) f(t)$, σ_{ik} – тензор напряжений; t – время; $\sigma(r)$ – закон распределения нормального напряжения; $f(t)$ – форма импульса. Параметры материала слоя: ρ – плотность; c_l – скорость продольной волны; c_t – скорость поперечной волны. По поверхности $z = l$ слой граничит с жидким полупространством с параметрами: ρ_1 – плотность; c_1 – скорость продольной волны. Необходимо определить импульсные волновые поля в слое и полупространстве.

Введем скалярный $\varphi = \varphi(r, z, t)$ и векторный $\psi = \psi(r, z, t)$ $(\psi \equiv \psi_\alpha)$ потенциалы смещения поля в слое. Эти потенциалы и потенциал смещения поля в полупространстве $\varphi_1 = \varphi_1(r, z, t)$ должны удовлетворять волновым уравнениям

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}
\end{gathered}
\tag{1}
$$

и системам граничных условий:

$$
\begin{cases} \sigma_{rz} = 0, \\ \sigma_{zz} = \sigma(r) f(t), \end{cases} \text{при } z = -l; \quad \begin{cases} \sigma_{rz} = 0, \\ \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(1)}, \\ u_z = u_z^{(1)}, \end{cases} \text{при } z = l,
$$

где σ_{rz} – касательное напряжение; u_z – нормальное смещение. Индекс (1) относится к полупространству.

Выразим компоненту смещения и компоненты напряжений, которые понадобятся в дальнейшем, через потенциалы [1, 2]:

$$
\begin{gathered}
u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\psi}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\
\sigma_{rz} = \mu\left(2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2}\right), \\
\sigma_{zz} = \lambda\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) + 2\mu\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z}\right),
\end{gathered}
$$

где λ, μ – упругие постоянные Ламе.

Для решения поставленной задачи применен метод интегральных преобразований, с использованием преобразования Фурье по временной переменной и преобразования Бесселя по пространственной переменной *r*:

$$
\begin{gathered}
\overline{\overline{\varphi}}(k, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \int_0^{\infty} \varphi(r, z, t) r J_0(kr) dr dt, \\
\varphi(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} \overline{\overline{\varphi}}(k, z, \omega) k J_0(kr) dk d\omega,
\end{gathered}
$$

где k, ω – параметры преобразования, имеющие физический смысл волнового числа и круговой частоты. Для векторного потенциала функцию Бесселя нулевого порядка в ядре преобразования нужно заменить на функцию Бесселя первого порядка.

Конечная протяженность области воздействия, а также затухание упругих волн в реальных средах дают основание полагать, что введенные потенциалы вместе со своими частными производными стремятся к нулю при $|t| \to \infty,\ r \to \infty.$ Тогда трансформанты решений волновых уравнений (1) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\overline{\overline{\varphi}}_1(k,z,\omega) = A_1(k,\omega)\exp(ibz),\\ \overline{\overline{\varphi}}(k,z,\omega) = A_2(k,\omega)shcz + A_3(k,\omega)chcz,\\ \overline{\overline{\psi}}(k,z,\omega) = A_4(k,\omega)shdz + A_5(k,\omega)chdz,\\ b^2 = \omega^2/c_1^2 - k^2, \qquad c^2 = k^2 - \omega^2/c_l^2, \qquad d^2 = k^2 - \omega^2/c_t^2.\end{gathered} \tag{2}$$

Ветвь радикала b выбирается из условия $Jmb > 0,$ выбор же ветвей радикалов c и d произволен, поскольку они не дают многозначности в окончательных выражениях.

Постоянные $A_1 - A_5,$ входящие в (2), определяются из преобразованной системы граничных условий

$$\sum_{j=1}^{5} a_{ij}A_j = B_i,\ (i=1,...,5), \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&a_{11}=a_{13}=a_{14}=a_{21}=a_{22}=a_{25}=a_{32}=a_{35}=0,\ \ a_{12}=2ckchcl,\ \ a_{15}=(2k^2-k_t^2)chdl,\\ &a_{23}=2ckshcl,\ \ a_{24}=(2k^2-k_t^2)shdl,\ \ a_{31}=a_{41}=\rho_1\omega^2\exp(ibl),\ \ a_{33}=2\mu(2k^2-k_t^2)chcl,\\ &a_{34}=4\mu kdchdl,\ \ a_{42}=\mu(2k^2-k_t^2)shcl,\ \ a_{43}=a_{33}/2,\ \ a_{44}=a_{34}/2,\ \ a_{45}=2\mu kdshdl,\\ &a_{51}=-ib\exp(ibl),\ \ a_{52}=cchcl,\ \ a_{53}=cshcl,\ \ a_{54}=kshdl,\ \ a_{55}=kchdl,\\ &B_1=B_2=B_4=B_5=0,\ \ B_3=\overline{\overline{\sigma}}(k,-l,\omega),\ \ \overline{\overline{\sigma}}(k,-l,\omega)=S(\omega)\overline{\sigma}(k),\\ &S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt,\ \ \overline{\sigma}(k)=\int_0^{\infty}\sigma(r)rJ_0(kr)dr,\end{aligned}$$

где $S(\omega)$ – спектральная функция импульса возбуждения; $\overline{\sigma}(k)$ – трансформанта Бесселя закона распределения нормального напряжения.

Решение линейной системы уравнений (3) дает следующие выражения для постоянных:

$$\begin{aligned}&A_1(k,\omega)=\frac{ick_t^2\overline{\overline{\sigma}}\exp(-ibl)}{2b\mu F(k,\omega)}\left[4cdk^2shclchcl-\left(2k^2-k_t^2\right)^2shdlchdl\right],\\ &A_2(k,\omega)=\frac{(2k^2-k_t^2)\overline{\overline{\sigma}}chcl}{2\mu F(k,\omega)}F_1(k,\omega),\ \ A_3(k,\omega)=\frac{(k_t^2-2k)\overline{\overline{\sigma}}shdl}{2\mu F(k,\omega)}F_2(k,\omega),\\ &A_4(k,\omega)=\frac{ck\overline{\overline{\sigma}}shcl}{\mu F(k,\omega)}F_2(k,\omega),\ \ A_5(k,\omega)=-\frac{ck\overline{\overline{\sigma}}chcl}{\mu F(k,\omega)}F_1(k,\omega),\\ &F_1(k,\omega)=F_s(k,\omega)-iD(k,\omega)shclshdl,\ \ F_2(k,\omega)=F_a(k,\omega)-iD(k,\omega)chclchdl,\\ &D(k,\omega)=c\rho_1\omega^2k_t^2/(b\mu),\ \ F_a(k,\omega)=4k^2cdshdlchcl-(2k^2-k_t^2)^2shclchdl,\\ &F_s(k,\omega)=4k^2cdshclchdl-(2k^2-k_t^2)^2shdlchcl,\end{aligned}$$

где $F_a(k,\omega)$ и $F_s(k,\omega)$ – характеристические функции дисперсионных уравнений Рэлея-Лэмба для слоя со свободными границами для антисимметричных и симметричных волн соответственно.

$$F(k,\omega)=F_a(k,\omega)F_s(k,\omega)-i\frac{\rho_1\omega^2 c}{2b\rho c_t^2}\left[F_a(k,\omega)shclshdl+F_s(k,\omega)chclchdl\right]$$ – характеристическая функция дисперсионного уравнения для слоя, находящегося в одностороннем контакте с полупространством. Нарушение симметрии задачи приводит к тому, что волновые процессы в рассматриваемой системе не распадаются на симметричный и антисимметричный.

Окончательные выражения для искомых потенциалов запишем в виде

$$\varphi(r,z,t)=\frac{1}{4\pi\mu}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{-i\omega t}\int_0^{\infty}\frac{(2k^2-k_t^2)\overline{\sigma}(k)kJ_0(kr)}{F(k,\omega)}\left[F_1chdlshcz-F_2shdlchcz\right]dkd\omega,$$

$$\psi(r,z,t)=\frac{1}{2\pi\mu}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{-i\omega t}\int_0^{\infty}\frac{ck^2\overline{\sigma}(k)J_1(kr)}{F(k,\omega)}\left[F_2shclshdz-F_1chclchdz\right]dkd\omega, \qquad (4)$$

$$\varphi_1(r,z,t)=\frac{i}{4\pi\rho c_t^4}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\omega^2e^{-i\omega t}\int_0^{\infty}\frac{ck\overline{\sigma}(k)J_0(kr)}{bF(k,\omega)}e^{ib(z-l)}\times$$

$$\times\left[4cdk^2shclchcl-(2k^2-k_t^2)^2shdlchdl\right]dkd\omega.$$

Выражения (4) описывают все типы акустических волн, возникающих при импульсном воздействии на поверхность упругого слоя. Остаются «непринципиальные» (с точки зрения «чистой» математики) трудности вычисления полученных интегралов. При малом значении параметра kr для вычисления интегралов могут быть применены численные методы. Увеличение kr приводит к увеличению времени вычислений, так как подынтегральные функции быстро осциллируют. В этом случае предпочтительнее применение асимптотических методов, подобных рассмотренным в [3-5]. Преимуществом асимптотических методов является также возможность выделения различных типов волн. Объемные волны выражаются через интегралы по перевальным путям в плоскости комплексного переменного. Вычеты в соответствующих полюсах дают поля нормальных и поверхностных волн. Боковые волны выражаются через интегралы по берегам разрезов, которые могут быть вычислены методом быстрейшего спуска. Для конкретной формы импульса возбуждения вычисляется его спектральная функция. Зная спектральную функцию, можно вычислить формы импульсов всех типов акустических волн в упругом слое и жидком полупространстве.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. – М.: Наука, 1965. – 203 с.
2. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
3. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 344 с.
4. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. – Л.: Судостроение, 1972. – 352 с.
5. Балабаев С.М. Исследование импульсного режима работы клиновых преобразователей для волн Рэлея и Лэмба: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Л.: Ленинградский ордена Ленина электротехнический институт им. В.И. Ульянова (Ленина), 1976. – 16 с.

Сведения об авторе: Балабаев Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор.