
ПРОМЫШЛЕННОЕ РЫБОЛОВСТВО. АКУСТИКА

УДК 539.3

С.М. Балабаев, Н.Ф. Ивина

Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет,
690087, г. Владивосток, ул. Луговая, 52б

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИЗЛУЧЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ АНТЕНН

Рассмотрен комбинированный метод конечных и граничных элементов для компьютерного моделирования пьезопреобразователей и гидроакустических антенн произвольной формы. Приведена его реализация для осесимметричного случая. Выполнен анализ основных параметров цилиндрической гидроакустической антенны, состоящей из двух водозаполненных преобразователей. Определены оптимальные геометрические размеры антенны.

Ключевые слова: гидроакустическая антенна, пьезопреобразователь, метод конечных элементов, метод граничных элементов.

S.M. Balabaev, N.F. Ivina

COMPUTER SIMULATION AND ANALYSIS OF RADIATION OF CYLINDRICAL HYDROACOUSTIC ANTENNAE

A mixed finite element-boundary element method for computer simulation of piezotransducers and hydroacoustic antennae of arbitrary shape is considered. Its realization for axis-symmetric case is carried out. Analysis of basic parameters of cylindrical hydroacoustic antenna consisting of two free-flooded transducers is executed. The optimum geometrical dimensions of antenna are determined.

Key words: hydroacoustic antenna, piezotransducer, finite element method, boundary element method.

Гидроакустическая антенна, содержащая от одного до шести одинаковых, соосно расположенных водозаполненных (свободнопогруженных, точнее, свободнозатопленных в американской терминологии) пьезоцилиндров с радиальной поляризацией, экспериментально исследовалась еще Г.У. Мак-Магоном (G.W. McMahon, Атлантическое оборонное научно-исследовательское учреждение, г. Дартмут, Канада) [1]. Для пьезоцилиндров конкретного размера опытным путем было установлено, что для получения равномерной широкополосной частотной характеристики чувствительности излучения пьезоцилиндры должны располагаться на определенном расстоянии друг от друга. Эта работа стимулировала большой интерес акустиков к разработке математических моделей водозаполненного пьезоцилиндра, являющегося двухрезонансной системой, анализу и оптимизации его параметров. Как отмечено в статье И.В. Вовка (Институт гидромеханики Академии наук Украины, г. Киев) [2], эта задача является «интересной и содержательной задачей акустики, имеющей богатую историю». Заметим также, что для первого автора знакомство с этой задачей произошло в январе 1972 г. при подготовке дипломного проекта в одном ленинградском «почтовом ящике» (т.е. это первая и, наверное, последняя «акустическая любовь»).

Приближенные аналитические модели водозаполненного пьезоцилиндра без учета пьезоэффекта были разработаны рядом отечественных акустиков [3-5]. Однако они не учитывают многие принципиально важные эффекты.

П.Х. Роджерс (P.H. Rogers, Технологический институт Джорджии, г. Атланта) [6] разработал численно-аналитическую модель водозаполненного пьезоцилиндра с радиальной поляризацией. Для моделирования пьезоцилиндра использована теория оболочек, а для численного интегрирования граничного интегрального уравнения (ГИУ) Гельмгольца - известная программа SHIP (ранее созданная под его руководством в Военно-морской научно-исследовательской лаборатории г. Вашингтон). Как показано авторами [7], теория оболочек, а следовательно, и предложенная комбинированная модель не учитывает изгибные моды, поэтому полученная на ее основе информация будет неполной. В [8] на основе разработанной авторами модели водозаполненного пьезоцилиндра, свободной от ограничений, присущих модели в статье [6], показано, что изгибная мода может значительно искажать частотные характеристики преобразователя и его диаграмму направленности и, возможно, давать неверную информацию на экране гидролокатора.

Ограниченные возможности аналитических методов приводят к тому, что многие вопросы разработки преобразователей можно решить только опытным путем, что связано с большими затратами времени и материалов. Известно, например, что при разработке и изготовлении низкочастотных гидроакустических антенн из секционированных крупногабаритных цилиндрических преобразователей потребовались большие, длительные и весьма дорогостоящие экспериментальные исследования. Вопрос об оптимальности конструкции при этом обычно остается открытым, так как часто невозможно исследовать все варианты.

Компьютерное моделирование на основе метода конечных элементов (МКЭ) и метода граничных элементов (МГЭ) позволяет анализировать реальную конструкцию при варьировании ее параметров и таким образом значительно ускорить и удешевить разработку высокоэффективных пьезопреобразователей (ПП). По этой причине авторы солидарны с мнением известного сторонника численных методов в акустике В.Ю. Завадского [9]: «... необходимы своевременная смена научных концепций, разработки радикально новых теорий, математическое и численное моделирование в условиях наиболее близких к реальным. Становится необходимым не просто улучшать и усложнять прежние формулы, а принципиально изменять подход, переходя от чрезмерной, иногда парализующей всякий анализ (даже численный) сложности теоретических формул к простоте, ясности и своеобразной красоте алгоритмических решений, которые берут в основу простоту и красоту исходных уравнений математической физики».

Высокая производительность современных компьютеров, а также перспективы их развития изменили соотношение между численными и аналитическими методами в пользу первых. Современные численные методы, особенно МКЭ и МГЭ, следует считать наиболее эффективным и перспективным математическим аппаратом для анализа реальных ПП. Таким образом, авторы согласны с мнением В.Ю. Завадского [9]: «Высокая производительность компьютеров изменила соотношение между вычислениями при использовании теоретических решений в виде формул для волновых задач и численными алгоритмами, схемами, разностными методами, применяемыми непосредственно к исходным уравнениям задачи. Конечно, формулы сохранили свое значение как более наглядные средства представления решения простых идеализированных задач. В то же время стало ясно, что в более сложных задачах необходимо использовать всю мощь компьютера и применять универсальные алгоритмы».

Первые работы, давшие мощный толчок компьютерному моделированию ПП с учетом пьезоэффекта и акустического излучения, были выполнены в начале 70-х гг. прошлого века практически одновременно и независимо в США и Японии. В США работы в этом направлении были начаты корпорацией «Дженерал дайнемикс» в отделе электросудов

(г. Гротон, Коннектикут) и продолжены в Военно-морском центре подводных исследований (г. Сан-Диего, Калифорния). Отметим, что именно в г. Гротон 21 января 1954 г. была спущена на воду первая в мире атомная подводная лодка «Наутилус», которая стоит сейчас у мемориального причала. Группой из восьми ученых были получены фундаментальные результаты по применению МКЭ для анализа колебаний ПП, излучения и рассеяния звука конечными телами, кратко опубликованные в 1970-1975 гг. в открытой печати в виде шести журнальных статей. В статье [10] изложен метод учета жидкой акустической нагрузки, основанный на применении ГИУ Гельмгольца. В этой работе поставлена и решена задача «стыковки» ранее разработанных программ: СНИЕФ (Центр подводных исследований) и MARTSAM (Дженерал дайнемикс). Можно считать, что для учета акустического излучения фактически использован МГЭ с кусочно-постоянной аппроксимацией неизвестных функций, хотя сам термин «метод граничных элементов» («boundary element method» – ВЕМ) был введен позже.

В данной работе применен ранее разработанный авторами комбинированный метод конечных и граничных элементов [11] с использованием элементов с квадратичной аппроксимацией. Использование таких элементов значительно увеличивает точность расчетов и уменьшает размеры глобальных матриц, а следовательно, и время вычислений. Как показано в статье [11], систему уравнений для анализа вынужденных колебаний ПП произвольной формы можно записать в виде

$$\begin{aligned} ([H_{uu}] - \omega^2 [M] + i\omega [C]) |u_i\rangle + [W][S] |P\rangle &= |H_{uv}\rangle, \\ \omega^2 \rho [B][W]^T |u_i\rangle - [A] |P\rangle &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $[H_{uu}]$ – глобальная матрица жесткости с учетом пьезоэффекта; $[M]$ – глобальная матрица массы; $[C]$ – демпфирующая матрица, учитывающая механические потери; $[W]$ – матрица направляющих косинусов внешней единичной нормали в узловых точках; $[S]$ – диагональная матрица площади; $[A]$ и $[B]$ – глобальные матрицы МГЭ, полученные специальным суммированием соответствующих элементных матриц; $|H_{uv}\rangle$ – глобальная матрица-столбец (вектор) пьезоэлектрической «жесткости»; $|u_i\rangle$ – вектор узловых смещений; $|P\rangle$ – вектор узловых давлений на поверхности излучения; ω – круговая частота; i – мнимая единица; ρ – плотность жидкости; символ T означает транспонирование.

Система (1) дополняется уравнением (2), которое определяет зависимость электрической проводимости Y от частоты:

$$Y = i\omega (\langle H_{uv} | |u_i\rangle - H_{vv}), \quad (2)$$

где $\langle H_{uv} |$ – глобальная матрица-строка пьезоэлектрической «жесткости»; H_{vv} – диэлектрическая «жесткость».

Рассмотрим более подробно МГЭ и его реализацию для осесимметричного случая. В МГЭ важную роль играет функция Грина – фундаментальное сингулярное решение соответствующего неоднородного уравнения с правой частью в виде дельта-функции Дирака. В задачах излучения этим уравнением является неоднородное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta \varphi(\vec{R}) + k^2 \varphi(\vec{R}) = -4\pi \delta(\vec{X} - \vec{Q}), \quad (3)$$

где Δ – оператор Лапласа; φ – потенциал скорости; $k = \omega/c$, c – скорость звука в жидкости; \vec{X} – радиус-вектор любой точки поля (точки наблюдения); \vec{Q} – радиус-вектор точки на поверхности S ПП; $\vec{R} = \vec{X} - \vec{Q}$; $\delta(\vec{X} - \vec{Q})$ – дельта-функция Дирака.

ГИУ для задач акустического излучения является ГИУ Гельмгольца, которое определяет давление в произвольной точке пространства X , если известно распределение давления и нормальной компоненты колебательной скорости на замкнутой поверхности S ПП (рис. 1, а) [5, 12]:

$$C(X)P(X) = \iint_S (P(Q)\mathcal{R}G(X, Q)/\partial n + i\omega\rho G(X, Q)V_n(Q))dS, \quad (4)$$

где $P(X)$, $P(Q)$ – давления в точке X акустического поля и в точке Q на поверхности S ; $V_n(Q)$ – колебательная скорость, нормальная к поверхности S ; \vec{n} – внешняя по отношению к ПП, единичная нормаль; $G(X, Q)$ – функция Грина, являющаяся решением неоднородного уравнения (3). В общем случае трехмерного пространства она равна

$$G(X, Q) = G(R) = \exp(-ikR)/R. \quad (5)$$

Коэффициент $C(X)$ в уравнении (4) определяется в зависимости от расположения точки X относительно поверхности S : $C(X) = 4\pi$, если точка X находится в пространстве вне поверхности S ; $C(X) = 0$, если точка X находится внутри S , и

$$C(X) = 4\pi + \iint_S \partial R^{-1} / \partial n dS, \quad (6)$$

если X находится на S . Выражение (6) позволяет определить $C(X)$, даже если в точке X на поверхности S существует неединственная нормаль; на плоской поверхности $C(X) = 2\pi$.

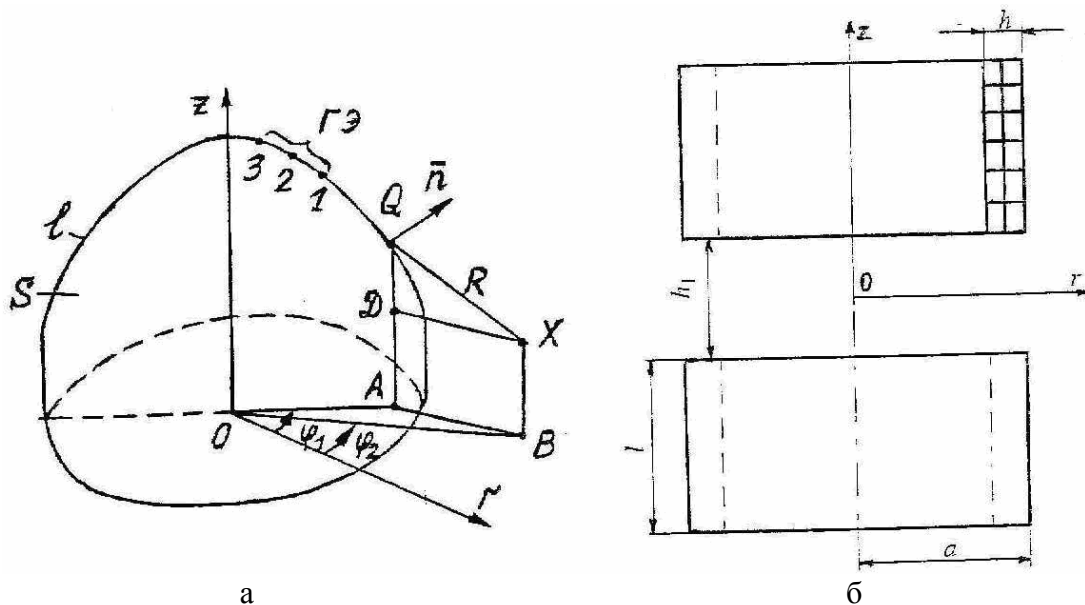


Рис.1. Расчетные модели: а – осесимметричного тела в МГЭ; б – антенны и ее разбиения на конечные элементы
 Fig. 1. Designed models: а – axis-symmetric solid at BEM; б – antenna and its partition into finite elements

Для интегрирования уравнения (4) поверхность S разбивается на конечное количество граничных элементов ($\Gamma\Theta$), число узловых точек которых зависит от порядка аппроксимирующих функций. МГЭ позволяет задать различный порядок аппроксимации искомых функций и самой поверхности интегрирования. Порядок аппроксимации в пределах $\Gamma\Theta$ учитывается выбором соответствующих функций формы $N_j(x_1, x_2)$, которые определены в локальных координатах x_1, x_2 . Тогда нормальную скорость и давление в пределах $\Gamma\Theta$ с номером k можно выразить следующим образом:

$$V_n^k = \sum_{j=1}^{l+1} N_j V_j^k, \quad P^k = \sum_{j=1}^{l+1} N_j P_j^k, \quad (7)$$

где l – порядок аппроксимации функций; V_j^k, P_j^k – узловые значения функций. Интегралы в ГИУ Гельмгольца (4) можно представить как сумму интегралов по $\Gamma\Theta$; k – количество $\Gamma\Theta$.

$$\sum_{k=1}^K \left(\iint_{S_k} P(Q) \partial G(R) / \partial n dS + i\omega\rho \iint_{S_k} V_n(Q) G(R) dS \right) = (4\pi + \sum_{k=1}^K \iint_{S_k} \partial R^{-1} / \partial n dS) P(X).$$

Поместим точку поля X на поверхность S ПП в точку с номером m . Значения неизвестных функций в пределах $\Gamma\Theta$ аппроксимируем выражениями (7) и вынесем узловые значения функций из-под знака интеграла:

$$\sum_k \sum_j (P_j^k \iint_{S_k} N_j \partial G / \partial n dS + i\omega\rho V_j^k \iint_{S_k} N_j G) dS = (4\pi + \sum_k \iint_{S_k} \partial R^{-1} / \partial n dS) P_m. \quad (8)$$

При выполнении интегрирования в пределах каждого $\Gamma\Theta$ удобно использовать локальные координаты; тогда компоненты элементных матриц можно ввести следующим образом:

$$a_{jm}^k = \iint_{S_k} N_j \partial G / \partial n \det[J] dx_1 dx_2; \quad b_{jm}^k = \iint_{S_k} N_j G \det[J] dx_1 dx_2; \\ c_m^k = \iint_{S_k} \partial R^{-1} / \partial n \det[J] dx_1 dx_2, \quad (9)$$

где $\det[J]$ – якобиан; функция Грина в выражениях (9) определяется расстоянием R между точками j и m .

Если точку m располагать последовательно во всех узловых точках, то получим систему линейных уравнений вида (8) относительно граничных узловых значений давления и нормальной скорости

$$\sum_k \sum_j a_{jm}^k P_j^k - (4\pi + \sum_k c_m^k) P_m = -i\omega\rho \sum_k \sum_j b_{jm}^k V_j^k, \quad (10)$$

$m=1 \div M$; M – количество узловых точек и количество уравнений системы (10).

Определим векторы давления $|P\rangle$ и нормальной скорости $|V_n\rangle$ как совокупность соответствующих узловых значений и перепишем систему уравнений (10) в виде

$$[A]|P\rangle = -i\omega\rho[B]|V_n\rangle, \quad (11)$$

где $[A]$ и $[B]$ – глобальные матрицы, полученные специальным суммированием соответствующих элементных матриц вида (9). Уравнение (11) можно использовать для решения задач Неймана и Дирихле, определяя решение во внутренней или внешней области.

Для заданной точки X можно вычислить давление в акустическом поле по известным граничным значениям давления и нормальной скорости в соответствии с уравнениями (4), (8) ($C(X) = 4\pi$):

$$P = (4\pi)^{-1}(\langle A_l || P \rangle + i\omega\rho \langle B_l || V_n \rangle), \quad (12)$$

где $\langle A_l |$, $\langle B_l |$ – матрицы-строки для заданной точки акустического поля. Выражение (12) применяется для определения поля изучения в ближней и дальней зонах, а также границы ближней зоны.

Совокупность системы уравнений (1), (2) и (12) позволяет определить все характеристики ПП: система (1) описывает давление на поверхности ПП и смещения всех узловых точек, уравнение (2) определяет электрическую проводимость, а уравнение (12) – давление в ближней и дальней зонах.

Рассмотрим основные соотношения МГЭ для осесимметричных ПП. При их выводе использованы некоторые результаты работ [5, 13]. Введем систему цилиндрических глобальных координат r, φ, z . Поверхностью интегрирования в интегралах в выражениях (4), (6) является замкнутая поверхность S , получаемая при вращении линии l (состоящей в данном случае из двух прямолинейных отрезков и части кривой линии, см. рис. 1, а) вокруг оси z . Дифференциал площади равен: $dS = r dr d\varphi$ (при интегрировании по кругу, перпендикулярному оси вращения); $dS = r dz d\varphi$ (при интегрировании по цилиндрической поверхности); $dS = r dl d\varphi$ (в общем случае), где дифференциал длины дуги равен $dl = ((dr)^2 + (dz)^2)^{1/2}$. Тогда в цилиндрических координатах выражения (4) и (6) с учетом (5) запишем в виде

$$C(X)P(X) = \int_l (P(Q) \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp(-ikR)}{R} \right) d\varphi + i\omega\rho V_n(Q) \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-ikR)}{R} d\varphi) r dl, \quad (13)$$

$$C(X) = 4\pi + \int_l \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) d\varphi r dl. \quad (14)$$

Рассмотрим сначала интегралы по углу в выражении (13). Обозначим их следующим образом:

$$J_1(X, Q) = \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-ikR)}{R} d\varphi. \quad (15)$$

$$J_2(X, Q) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp(-ikR)}{R} \right) d\varphi. \quad (16)$$

Очевидно, что при $R = 0$ эти интегралы являются сингулярными и их нельзя вычислить численно по обычным квадратурным формулам. Поэтому используем следующую процедуру: представим интеграл $J_1(X, Q)$ (15) в виде суммы двух интегралов:

$$J_1(X, Q) = J_3(X, Q) + J_4(X, Q), \tag{17}$$

где
$$J_3(X, Q) = \int_0^{2\pi} (\exp(-ikR) - 1) / R d\varphi, \tag{18}$$

$$J_4(X, Q) = \int_0^{2\pi} R^{-1} d\varphi. \tag{19}$$

Несложно показать, что $\lim_{R \rightarrow 0} (\exp(-ikR) - 1) / R = -ik$, следовательно, подынтегральная функция интеграла $J_3(X, Q)$ является ограниченной и его можно вычислить численно по обычным квадратурным формулам.

Рассмотрим сингулярный интеграл $J_4(X, Q)$ (19). Выразим расстояние R между точками $Q(r_1, \varphi_1, z_1)$ и $X(r_2, \varphi_2, z_2)$ через координаты этих точек. Из треугольника OAB определим $AB = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2))^{1/2}$, тогда из прямоугольного треугольника QDX с учетом обозначения $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ получим $R = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\varphi + (z_1 - z_2)^2)^{1/2}$. Введем обозначения: $R_1^2 = (r_1 + r_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$, $k_1^2 = 4r_1r_2/R_1^2$, тогда выражение (19) можно преобразовать к виду

$$J_4(X, Q) = R_1^{-1} \int_0^{2\pi} (1 - 0,5k_1^2(1 + \cos\varphi))^{-1/2} d\varphi.$$

Выполнив замену переменной интегрирования по формуле $\varphi = \pi - 2\alpha$, окончательно получим для этого интеграла

$$J_4(X, Q) = 4R_1^{-1} \int_0^{\pi/2} (1 - k_1^2 \sin^2 \alpha)^{-1/2} d\alpha = 4R_1^{-1} F(\pi/2, k_1), \tag{20}$$

где $F(\pi/2, k_1)$ – полный эллиптический интеграл первого рода [14].

Интеграл $J_2(X, Q)$ (16) также представим в виде суммы двух интегралов:

$$J_2(X, Q) = J_5(X, Q) + J_6(X, Q), \tag{21}$$

где
$$J_5(X, Q) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp(-ikR) - 1}{R} \right) d\varphi, \tag{22}$$

$$J_6(X, Q) = \int_0^{2\pi} \partial R^{-1} / \partial n d\varphi. \tag{23}$$

Отметим, что интеграл $J_6(X, Q)$ совпадает с интегралом по углу в выражении (14). Рассмотрим интеграл $J_5(P, Q)$. Производная по единичной нормали равна

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp(-ikR) - 1}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\exp(-ikR) - 1}{R} \right) \frac{\partial R}{\partial n}, \tag{24}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\exp(-ikR) - 1}{R} \right) = \frac{1 - (1 + ikR) \exp(-ikR)}{R^2}. \quad (25)$$

С помощью правила Лопиталя несложно показать, что

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\exp(-ikR) - 1}{R} \right) = -\frac{k^2}{2}.$$

Производная по нормали (второй множитель в выражении (24) также является ограниченной, поэтому интеграл $J_5(X, Q)$ (22) можно вычислить численно по обычным квадратурным формулам.

Производная по нормали равна

$$\partial R / \partial n = \partial R / \partial r_1 \cos \alpha + \partial R / \partial z_1 \cos \beta,$$

где $\cos \alpha$ и $\cos \beta = \sin \alpha$ – направляющие косинусы внешней нормали,

$$\frac{\partial R}{\partial r_1} = \frac{r_1 - r_2 \cos \varphi}{R}, \quad \frac{\partial R}{\partial z_1} = \frac{z_1 - z_2}{R}.$$

Рассмотрим сингулярный интеграл $J_6(X, Q)$ (23):

$$J_6(X, Q) = \int_0^{2\pi} \partial R^{-1} / \partial n d\varphi = \partial / \partial n \int_0^{2\pi} R^{-1} d\varphi = \partial J_4 / \partial n = \partial / \partial n (4 / R_1 F(\pi / 2, k_1)).$$

Взяв производную по нормали, получим

$$J_6(X, Q) = 4 / R_1^2 \left(\left(R_1 \frac{\partial F}{\partial k_1} \frac{\partial k_1}{\partial r_1} - F \frac{\partial R_1}{\partial r_1} \right) \cos \alpha + \left(R_1 \frac{\partial F}{\partial k_1} \frac{\partial k_1}{\partial z_1} - F \frac{\partial R_1}{\partial z_1} \right) \sin \alpha \right). \quad (26)$$

Производные, входящие в выражение (26), вычисляются аналитически:

$$\frac{\partial R_1}{\partial r_1} = \frac{r_1 + r_2}{R_1}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial z_1} = \frac{z_1 - z_2}{R_1}, \quad \frac{\partial k_1}{\partial r_1} = \frac{\sqrt{r_2} R_1^2 - 2r_1(r_1 + r_2)}{R_1^3}, \quad \frac{\partial k_1}{\partial z_1} = \frac{2\sqrt{r_1 r_2}(z_2 - z_1)}{R_1^3}.$$

Рассмотрим производную полного эллиптического интеграла первого рода по его модулю k_1 . Известно [14], что

$$\frac{\partial F(\pi / 2, k_1)}{\partial k_1} = \frac{E(\pi / 2, k_1) - k_1^2 F(\pi / 2, k_1)}{k_1 k_2^2},$$

где $k_2 = \sqrt{1 - k_1^2}$, $E(\pi / 2, k_1) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$ – полный эллиптический интеграл второго рода.

Таким образом, выражения (13) и (14) перепишем в виде

$$C(X)P(X) = \int_l (P(Q)(J_5(X, Q) + J_6(X, Q)) + i\omega\rho V_n(Q)(J_3(X, Q) + J_4(X, Q))) r dl, \quad (27)$$

$$C(X) = 4\pi + \int_l J_6(X, Q) r dl, \quad (28)$$

где интегралы $J_3(X, Q) - J_6(X, Q)$ определяются соответственно выражениями (18), (20), (22), (26). В выражениях (27) и (28) нужно вычислить криволинейные интегралы первого рода по длине l .

Рассмотрим вычисление этих криволинейных интегралов. В МГЭ образующая поверхности вращения разбивается на ГЭ с квадратичной аппроксимацией. На рис. 1, а изображен один типичный ГЭ с тремя узлами. Функции формы ГЭ с квадратичной аппроксимацией при указанной нумерации узлов запишем в виде

$$N_1(x) = 0,5x(x-1), \quad N_2(x) = 1-x^2, \quad N_3(x) = 0,5x(x+1), \quad (29)$$

где x – локальная координата, $x \in [-1; 1]$. Из выражений (29) очевидно, что каждая функция формы, как и в МКЭ, равна единице в одном определенном узле и обращается в нуль во всех остальных узлах. Глобальные координаты любой точки Q на линии l можно записать в виде

$$r(x) = \sum_{j=1}^3 N_j(x)r_j, \quad z(x) = \sum_{j=1}^3 N_j(x)z_j, \quad (30)$$

где r_j, z_j – глобальные координаты узлов. Выражения (7), аппроксимирующие нормальную скорость и давление в пределах ГЭ с номером k , перепишем в виде

$$V_n^k(x) = \sum_{j=1}^3 N_j(x)V_j^k, \quad P^k(x) = \sum_{j=1}^3 N_j(x)P_j^k. \quad (31)$$

Дифференциал длины дуги в общем случае равен

$$dl = \sqrt{(dr)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(r'_x)^2 + (z'_x)^2} dx, \quad (32)$$

где с учетом выражения (30)

$$r'_x = \sum_{j=1}^3 N'_j(x)r_j, \quad z'_x = \sum_{j=1}^3 N'_j(x)z_j. \quad (33)$$

Производные функций формы, входящие в выражения (33), вычисляются аналитически, они равны: $N'_1 = x - 0,5$; $N'_2 = -2x$; $N'_3 = x + 0,5$.

Из выражения (32) следует, что якобиан преобразования глобальных координат в локальные для ГЭ с номером k равен

$$J^k(x) = \sqrt{\left(\frac{r'}{x}\right)^2 + \left(\frac{z'}{x}\right)^2}, \quad (34)$$

где входящие в него производные определяются выражениями (33). Якобиан в данном случае равен отношению длин ГЭ в глобальной и локальной системах координат.

Интегралы по длине в выражениях (27), (28) представим как сумму интегралов по ГЭ, тогда с учетом введенных аппроксимаций получим

$$C(X) = 4\pi + \sum_k \int_{-1}^1 J_6(X, x) r(x) J^k(x) dx. \quad (35)$$

$$C(X)P(X) = \sum_k \sum_j \left(P_j^k \int_{-1}^1 (J_5(X, x) + J_6(X, x)) N_j(x) r(x) J^k(x) dx + \right. \\ \left. + i\omega\rho V_j^k \int_{-1}^1 (J_3(X, x) + J_4(X, x)) N_j(x) r(x) J^k(x) dx \right). \quad (36)$$

Поместим точку поля X на поверхность S ПП (кривую l) в точку с номером m . Тогда компоненты элементных матриц, определяемые в общем случае выражениями (9), для осесимметричного случая запишем в виде

$$a_{jm}^k = \int_{-1}^1 (J_5(X_m, x) + J_6(X_m, x)) N_j(x) r(x) J^k(x) dx, \\ b_{jm}^k = \int_{-1}^1 (J_3(X_m, x) + J_4(X_m, x)) N_j(x) r(x) J^k(x) dx, \quad (37) \\ c_m^k = \int_{-1}^1 J_6(X_m, x) r(x) J^k(x) dx.$$

Следовательно, система линейных уравнений (10) имеет прежний вид, но компоненты элементных матриц в осесимметричном случае определяются выражениями (37). На основе изложенного алгоритма разработана компьютерная программа комбинированного метода конечных и граничных элементов для анализа собственных колебаний и акустического излучения осесимметричных ПП и антенн, состоящих из таких ПП.

Комбинированный метод конечных и граничных элементов дает возможность разработать, в частности, компьютерную модель цилиндрической гидроакустической антенны из водозаполненных цилиндров, учитывающую пьезоэффект и акустическое взаимодействие пьезоцилиндров. Наиболее просто эта модель реализуется для случая двух цилиндров.

Рассмотрим антенну, состоящую из двух одинаковых соосных пьезоцилиндров с тангенциальной поляризацией (см. рис. 1, б), соединенных параллельно; пьезокерамика – ЦТБС-3. Параметры пьезокерамики соответствуют справочным данным [15]. Каждый пьезоцилиндр определяется внешним радиусом a , высотой l и толщиной стенки h ; расстояние между пьезоцилиндрами равно h_1 . В дальнейшем все размеры определяются безразмерными отношениями, нормированными на внешний радиус цилиндра a (т.е. дальше l , h и h_1 – безразмерные).

Для анализируемой антенны рассчитывались частотные характеристики чувствительности излучения в точке дальнего поля на плоскости симметрии антенны (в дБ относительно уровня 1 мкПа/В при 1 м), нормированные диаграммы направленности в вертикальной плоскости, а также распределения модулей нормальной (радиальной) компоненты колебательной скорости и давления на внешней и внутренней цилиндрических поверхностях верхнего пьезоцилиндра.

зоцилиндра. Так как чувствительность излучения является локальной характеристикой (т.е. зависит от выбранной точки), рассчитывалась также интегральная характеристика – частотная зависимость безразмерной активной составляющей акустической мощности.

Ранее [8, 11] для одиночного водозаполненного пьезоцилиндра (двухрезонансной системы) было введено понятие оптимальных геометрических размеров. Под ними понимаются размеры, при которых чувствительность излучения на объемном и радиальном резонансах примерно одинакова, а неравномерность частотной характеристики не превышает 3 дБ.

На рис. 2, а приведены частотные характеристики чувствительности излучения антенны из двух одинаковых пьезоцилиндров при фиксированном расстоянии между ними при размерах, близких к оптимальным (две кривые соответствуют двум толщинам стенки). А на рис. 2, б – частотные характеристики безразмерной активной составляющей акустической мощности при тех же геометрических размерах. По оси абсцисс отложена безразмерная частота $k_1 a$, k_1 – волновое число поперечной волны в пьезокерамике. Неравномерность на частотных характеристиках при $k_1 a \approx 1,6$ для цилиндров с меньшей толщиной стенки (кривые 1) объясняется влиянием антисимметричной моды, которая искажает частотные характеристики. Антисимметричная мода в одиночном пьезоцилиндре со сплошными электродами, находящемся в бесконечном пространстве, не возбуждается. Проявление антисимметричной моды в антенне объясняется акустическим взаимодействием пьезоцилиндров, которое приводит к асимметрии распределения скорости и давления на излучающих цилиндрических поверхностях во всей рабочей полосе частот. Наиболее сильно антисимметричная мода проявляет себя при большом акустическом взаимодействии (малом расстоянии между пьезоцилиндрами). При увеличении этого расстояния акустическое взаимодействие уменьшается, это приводит к уменьшению влияния антисимметричной моды на частотные характеристики. Для пьезоцилиндров с большей толщиной стенки антисимметричная мода находится ниже рабочего диапазона частот и поэтому не искажает частотные характеристики – кривые 2.

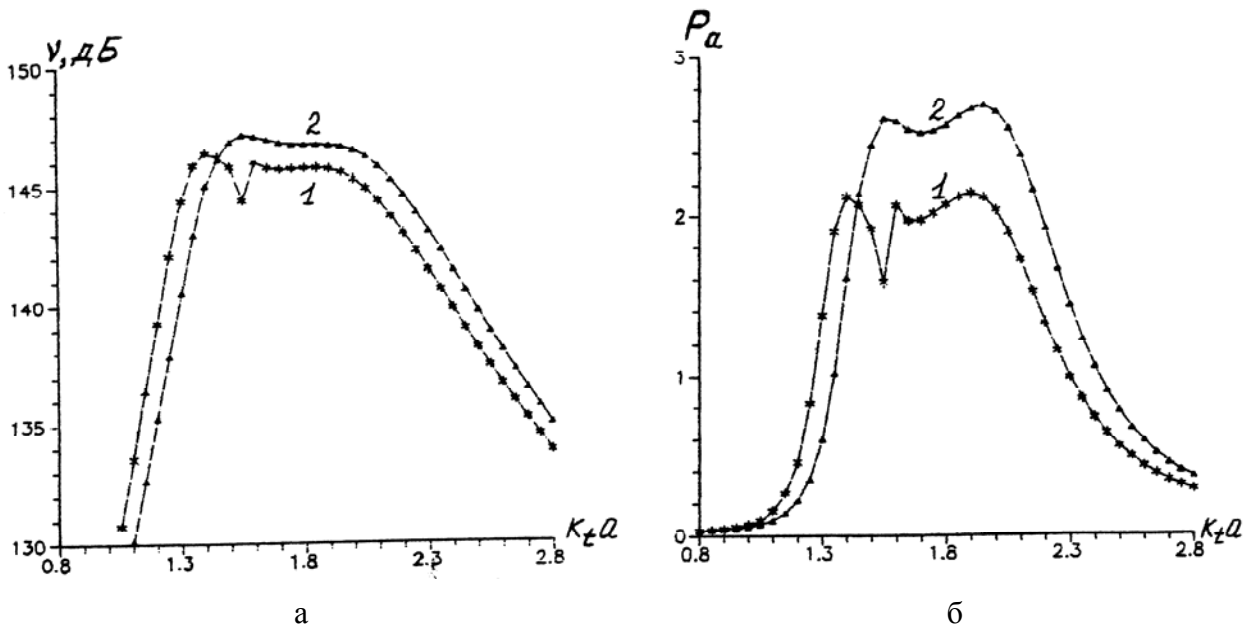


Рис. 2. Частотные характеристики цилиндрической антенны при $h_1 = 0,1$: а – чувствительности излучения; б – безразмерной активной составляющей акустической мощности: 1 – $h = 0,25, l = 0,4$; 2 – $h = 0,3, l = 0,35$

Fig. 2. Frequency characteristics of cylindrical antenna at $h_1 = 0,1$: а – radiation sensitivity; б – dimensionless active component of acoustic power: 1 – $h = 0,25, l = 0,4$; 2 – $h = 0,3, l = 0,35$

На рис. 3, а, б приведены распределения модулей безразмерных нормальной компоненты колебательной скорости и давления на внешней и внутренней цилиндрических поверхностях верхнего пьезоцилиндра антенны на трех частотах. По оси абсцисс отложены номера узловых точек на цилиндрических поверхностях. Первые 13 точек расположены на внешней поверхности снизу вверх, последующие 13 точек - на внутренней поверхности сверху вниз. Точки расположены на одинаковом расстоянии друг от друга, причем точки 7 и 20 находятся на плоскости симметрии пьезоцилиндра.

Рассмотрение форм распределения модулей нормальной колебательной скорости и давления на излучающих цилиндрических поверхностях показывает, что при малом расстоянии между пьезоцилиндрами (сильном акустическом взаимодействии) они значительно отличаются от соответствующих форм для одиночного пьезоцилиндра оптимальной высоты, а также значительно меняются с изменением частоты при фиксированных геометрических размерах. Характерным является то, что акустическое взаимодействие между пьезоцилиндрами приводит к асимметрии распределения указанных величин относительно плоскости симметрии пьезоцилиндра. При $h_1 = 0,1$ (здесь и в дальнейшем рассматривается верхний пьезоцилиндр при оптимальных размерах) модуль скорости при $k_1 a = 1,25$ (рис. 3, а, кривые 1, 2) почти линейно растет от верхнего торца цилиндра к нижнему. Коэффициент неравномерности (в данном случае отношение модулей на концах пьезоцилиндра) составляет для скорости 1,44 на внешней и внутренней цилиндрических поверхностях. Распределение модуля давления по сравнению с одиночным пьезоцилиндром также становится несимметричным: максимум смещен к нижнему концу, на нижнем конце давление больше, чем на верхнем; коэффициент неравномерности $k_p = 1,59$ на внешней поверхности и 1,86 – на внутренней. На радиальном резонансе ($k_1 a = 1,9$) модуль нормальной скорости наоборот почти линейно уменьшается от верхнего торца пьезоцилиндра к нижнему, $k_v = 1,14$ на внешней поверхности и 1,13 – на внутренней. Давление имеет меньшую асимметрию, чем на объемном резонансе, $k_p = 1,48$ на внутренней и 2,09 – на внешней поверхностях.

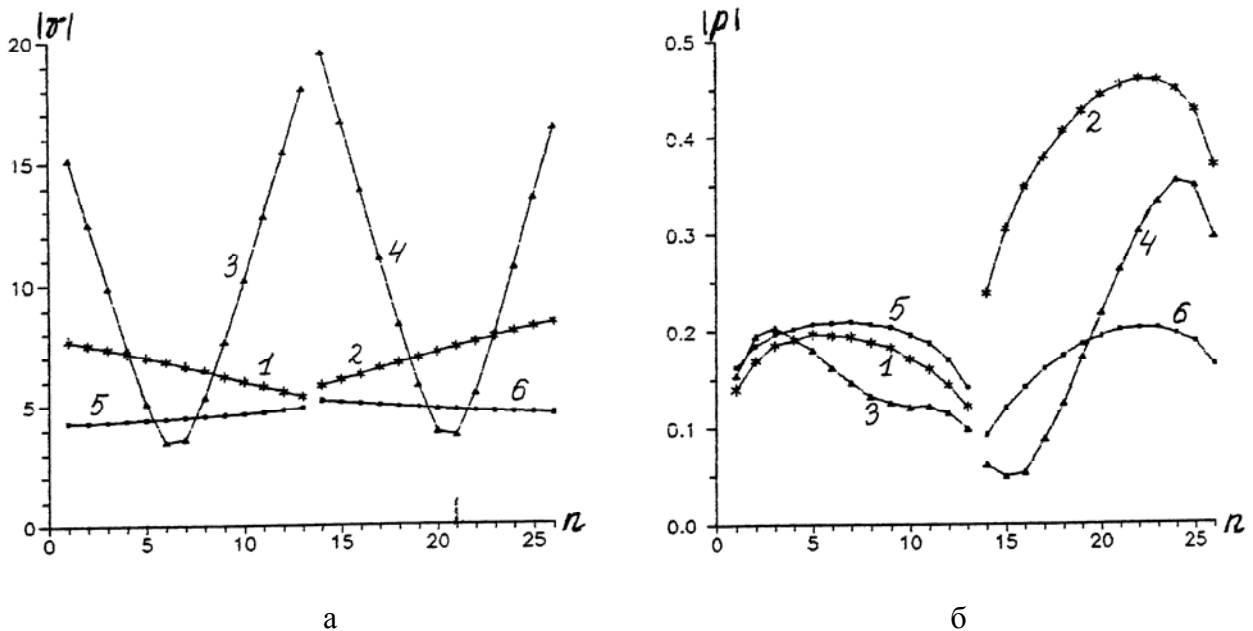


Рис. 3. Распределения на цилиндрических поверхностях при $h_1 = 0,1, l = 0,5$:
 а – скорость; б – давление: 1, 2 – $k_1 a = 1,25$; 3, 4 – $k_1 a = 1,6$; 5, 6 – $k_1 a = 1,9$
 Fig. 3. Distributions on cylindrical surfaces at $h_1 = 0,1, l = 0,5$:
 а – velocity; б – pressure: 1, 2 – $k_1 a = 1,25$; 3, 4 – $k_1 a = 1,6$; 5, 6 – $k_1 a = 1,9$

Анализировались также и многие другие варианты и диаграммы направленности антенны. Этот анализ показывает, что при проектировании гидроакустической антенны из соосных водозаполненных пьезоцилиндров надо избегать влияния двух паразитных мод, которые могут исказить ее частотные характеристики и диаграмму направленности: изгибной, частота которой выше частоты радиального резонанса, и антисимметричной, частота которой ниже частоты радиального резонанса. Этого можно достичь изменением относительной высоты и толщины стенки пьезоцилиндра. Изменение распределений модулей нормальной колебательной скорости и давления для антенны при небольшом расстоянии h_l по сравнению с одиночным пьезоцилиндром почти не сказывается на ее диаграммах направленности на частотах объемного и радиального резонансов; большее различие наблюдается только на частотах вблизи антисимметричной моды. При увеличении расстояния между пьезоцилиндрами неравномерность распределения модулей скорости и давления уменьшается, и при $h_l > 2,5$ их распределения близки к распределениям соответствующих величин для одиночного пьезоцилиндра. При $h_l > 1,5$ начинает формироваться добавочный максимум диаграммы направленности, который достигает значительной величины на частоте радиального резонанса.

Проведенный анализ всех характеристик цилиндрической гидроакустической антенны позволяет сделать следующие основные выводы.

Акустическое взаимодействие между пьезоцилиндрами приводит к тому, что оптимальная высота пьезоцилиндров в антенне зависит от расстояния между ними. Причем при малом расстоянии она составляет примерно половину от оптимальной высоты одиночного цилиндра (при $h_l = 0,2$) и повышается с увеличением этого расстояния.

Отметим, что для пьезоцилиндра с меньшей толщиной стенки ($h_l = 0,15$) оптимальная высота пьезоцилиндров в антенне при малом расстоянии между ними составляет примерно 0,7 от оптимальной высоты одиночного цилиндра. Таким образом, толщина стенки пьезоцилиндра, которая не учитывается в аналитических моделях водозаполненного пьезоцилиндра (например, в статье [6]), оказывает значительное влияние на основные параметры гидроакустической антенны при учете акустического взаимодействия пьезоцилиндров.

Частотная характеристика с двумя максимумами, характерными для одиночного водозаполненного пьезоцилиндра, в антенне может формироваться не всегда, а только при малом расстоянии между цилиндрами и большом (когда их акустическое взаимодействие почти не сказывается). Между этими расстояниями частотные характеристики с двумя максимумами не формируются, это приводит к уменьшению относительной ширины полосы пропускания до 48 % (при $l = 0,6$; $h_l = 1$).

При малом расстоянии между пьезоцилиндрами антенна из двух цилиндров оптимальной высоты не дает увеличения чувствительности излучения на 6 дБ (в два раза) и соответствующего увеличения акустической мощности; это объясняется сильным акустическим взаимодействием между пьезоцилиндрами.

Акустическое взаимодействие между пьезоцилиндрами почти не сказывается на расстоянии $h_l \geq 2,5$, при этом частотные характеристики по форме близки к частотным характеристикам одиночного пьезоцилиндра, чувствительность излучения увеличивается на 6 дБ, а безразмерная активная составляющая акустической мощности – в два раза (и более – на частоте радиального резонанса, это связано с формированием добавочного максимума характеристики направленности). Отметим, что длина волны в жидкости на частоте радиального резонанса пьезоцилиндра ($k_r a = 1,9$) составляет $2,5 a$.

В заключение отметим, что пьезоцилиндр с внутренним твердым заполнением обладает характеристиками, подобными характеристикам водозаполненного цилиндра. При заполнении цилиндра легким материалом с небольшим акустическим сопротивлением, близ-

ким к акустическому сопротивлению воды (эбонит, сферопластик и т.п.), он также обладает широкополосной частотной характеристикой с двумя максимумами. Это показано авторами в работах [16, 17]. Таким образом, пьезоцилиндры с внутренним твердым заполнением также можно использовать в широкополосных гидроакустических антеннах.

Список литературы

1. McMahon G.W. Performance of open ferroelectric ceramic cylinders in underwater transducers // Journ. Acoust. Soc. Amer. – 1964. – Vol. 36, № 3. – P. 528-533.
2. Вовк И.В. Излучение звука конечной решеткой, состоящей из открытых цилиндрических пьезокерамических оболочек // Акуст. журн. – 1992. – Т. 38, № 3. – С.427-434.
3. Глазанов В.Е. О сопротивлении излучения водозаполненного цилиндра // Акуст. журн. – 1989. – Т. 35, № 5. – С.801-804.
4. Томилина Т.М. Импеданс излучения полого цилиндрического излучателя // Акуст. журн. – 1989. – Т. 35, № 1. – С. 122-125.
5. Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. – Л.: Судостроение, 1989. – 304 с.
6. Rogers P.H. Mathematical model for a free-flooded piezoelectric cylinder transducer // Journ. Acoust. Soc. Amer. – 1986. – Vol. 80, № 1. – P. 13-18.
7. Балабаев С.М., Ивина Н.Ф. Анализ собственных колебаний пьезокерамических цилиндров произвольных размеров // Прикл. механика. – 1989. – Т. 25, № 10. – С. 37-41.
8. Балабаев С.М., Ивина Н.Ф. Акустическое излучение водозаполненной пьезокерамической оболочки // Акуст. журн. – 1999. – Т. 45, № 3. – С. 293-300.
9. Завадский В.Ю. Моделирование волновых процессов. – М.: Наука, 1991. – 248 с.
10. Smith R.R., Hunt J.T., Barach D. Finite element analysis of acoustically radiating structures with applications to sonar transducers // Journ. Acoust. Soc. Amer. – 1973. – Vol. 54, № 5. – P. 1277-1288.
11. Балабаев С.М., Ивина Н.Ф. Анализ пьезопреобразователей комбинированным методом конечных и граничных элементов // Акуст. журн. – 1996. – Т. 42, № 2. – С. 172-178.
12. Jeans R.A., Mathews I.C. Solution of fluid-structure interaction problems using a coupled finite element and variational boundary element technique // Journ. Acoust. Soc. Amer. – 1990. – Vol. 88, № 5. – P. 2459-2466.
13. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
14. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
15. Пьезокерамические преобразователи / под ред. С.И. Пугачева. – Л.: Судостроение, 1984. – 256 с.
16. Балабаев С.М., Ивина Н.Ф. Акустическое излучение цилиндрического пьезопреобразователя с внутренним твердым заполнением // Акуст. журн. – 1999. – Т. 45, № 4. – С. 450-453.
17. Balabaev S.M., Ivina N.F. Computer modeling and analysis of a cylindrical piezoceramic transducer with interior solid filling // Journ. Acoust. Soc. Amer. – 1999. – Vol. 106, № 4, Pt. 2. – P. 2196.

Сведения об авторах: Балабаев Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор;

Ивина Наталья Федоровна, доктор технических наук, профессор.