

УДК 573:591.4

В.И. БеляевИнститут экологии растений и животных УрО РАН,
620144, г. Екатеринбург, ул. 8 марта, 202**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ y'_i/x_i
ДЛЯ ОЦЕНКИ ПОЛОВЫХ РАЗЛИЧИЙ ВО ВНЕШНЕМ ОБЛИКЕ
ЖИВОТНЫХ (НА ПРИМЕРЕ РЫБ)**

Расчетная геометрическая прогрессия отношений y'_i/x_i , где y'_i , см – форма тела самок или самцов в масштабе числового значения y_i в исходной модели двухмерного изометрического виртуального облика (модели ДИВО) [1], x_i – длина тела рыб, см, использована в качестве модели динамики формы тела по длине тела самок популяции конкретного вида рыб. Модель динамики формы тела по длине тела самок позволяет оценить статистически сходство или отличие по форме тела самок и самцов в отдельно взятой популяции вида, самок из разных популяций или самок видов рыб, близких по внешнему строению тела. Аналогичными свойствами обладает и модель динамики формы тела по длине тела самцов, построенная по материалам измерения некоторого числа самцов данного вида рыб.

Ключевые слова: популяции рыб, моделирование, форма тела, геометрическая прогрессия.

V.I. Belyaev**THE USE OF GEOMETRIC PROGRESSION FOR ESTIMATION
OF SEXUAL DIFFERENCES IN THE ANIMAL EXTERIORS
(WITH SPECIAL REFERENCE TO FISHES)**

As a model of body form according to body length dynamics in females of certain fish populations we used calculated geometric model of ratio y'_i/x_i , where y'_i , cm was a body form of females or males in as of numerical expression of y_i in an initial model of two-dimensional isometric virtual exterior (TIVE model) x_i , correspondingly, was a fish body length. A model of body form according to body length dynamics in females permits to estimate statistically the resemblance or difference in body form in females and males in individual populations of the species, in females from different populations, or in females belonging to fish species resembling each other in body exterior. Analogous properties are peculiar also to a model of body form according to body length dynamics in males constructed on the basis of the materials of measuring of certain male individuals of given fish species.

Key words: fish populations, modeling, body form, geometric progression.

Воспроизводимый человеческим глазом современный физический облик животных разных видов является продуктом естественного отбора многих поколений животных в менявшихся условиях среды. С середины двадцатого столетия особенности внешнего и внутреннего строения тела животных изучают по значениям индексов – относительным значениям пластических морфологических признаков. Можно утверждать, что индексирование измеренных значений признаков с того времени возведено в ранг основного приема преобразования исходных данных (в ихтиологии, например). В таком виде данные публикуют (таблицы индексов), накапливают и анализируют [2, 3, 4, 5, 6].

Известно, что при росте размеров тела у животных в онтогенезе упорядоченно изменяются величины отношений между линейными промерами разных пластических признаков и линейными промерами длины тела. Аналогично изменяются значения и таких индексов, как масса органов, поделенная на массу тела.

Данное явление известно под названием размерной изменчивости внешнего облика животных [7]. Наличие размерной изменчивости должно было исходно логически привести исследователей к мысли о необходимости разработки и принятии единых правил сбора первичных материалов по пластической морфологии животных – следовало отбирать из природных популяций вида выборки особей, в которых животные должны быть, в среднем, одинаковыми по размерам (длине) тела.

Отсутствие предварительной общей договоренности по данному вопросу в конечном итоге привело к печальному результату: частично или полностью оказались малопригодными для межпопуляционного сравнения результаты работ нескольких поколений исследователей [6].

Сбор материалов по пластической морфологии рыб и других видов животных, изучение динамики процесса формирования внешнего облика животного в онтогенезе, оценку его своеобразия у животных в разных частях ареала вида необходимо проводить на организационной, логической, математической и графической основах. Так, например, результаты измерения некоторого числа пластических признаков ($n \geq 5$), действительно информативных при отражении формы тела самок и самцов данного вида рыб, уже позволяют построить две исходные модели двухмерного изометрического виртуального облика – модели ДИВО самок и самцов [1] и две модели динамики формы тела по длине тела.

Модель динамики формы тела по длине тела самок или самцов популяции конкретного вида рыб в математическом выражении есть геометрическая прогрессия y'_i/x_i , где y'_i , см – форма тела самок или самцов данного вида рыб в масштабе числового значения y_i в исходной модели ДИВО, x_i , см – длина тела особей.

В предлагаемой читателю работе поставлена задача проиллюстрировать последовательность расчета и построения исходной модели формы тела (модели ДИВО) и модели динамики формы тела по длине тела рыб на примере самок речного гольяна (*Phoxinus phoxinus* L.), а также статистическую оценку половых различий по форме тела самок и самцов этого вида рыб, составляющих единую популяцию вида. Для этой цели привлечены линейные промеры четырехсот тридцати самок и самцов, отловленных в основном в июле-сентябре 2004 г. и частично в те же месяцы 2005 г. на участке русла верхнего течения р. Утка (Средний Урал, бассейн р. Чусовая), расположенном возле ст. Ильмовка Свердловской железной дороги.

Измерение линейных размеров признаков проведено по схеме горизонтальных (параллельных осевой линии тела рыб) и вертикальных (перпендикулярных осевой линии тела) промеров. Выдержанность перпендикулярности при измерении разных пластических признаков и высокая точность линейных промеров, величина которых у разных по длине тела особей гольяна колебалась от 0,3 до 8,5 см, достигнуты благодаря тому, что измерение рыб проведено при помощи специального оптико-механического приспособления, состоящего из двух взаимосвязанных площадок.

Каждая площадка жестко прикреплена к отдельному штангенциркулю. Площадки передвигаются по штангам циркулей в горизонтальной плоскости и, по отношению друг к другу, на разной высоте в перпендикулярных направлениях. На поверхности нижней площадки нанесен отрезок прямой линии в направлении, параллельном движению площадки по штанге циркуля. Перед измерением рыба укладывается правым боком на нижнюю площадку, где ее тело располагается таким образом, чтобы осевая линия тела совпала с отрезком прямой, нанесенным на площадку.

На верхней площадке приспособления жестко закреплена зеркальная фотокамера марки «Зенит 3М». В центре нижней матовой поверхности пентапризмы фотокамеры нанесена черная точка – метка. Таким способом положение метки на поверхности матового стекла совмещено с главной оптической осью системы *окуляр фотокамеры – объектив*

«Гелиос 44». Поэтому черная точка поименована еще и как оптическая метка. При рассмотрении тела рыбы через окуляр фотокамеры место расположения оптической метки в точке совмещения проекции конца передней части рыла рыбы с отрезком прямой на нижней площадке соответствует отсчету «ноль» на обоих штангенциркулях. Наведение оптической метки путем передвижения площадок относительно друг друга на точку, расположенную на любом участке левого бока рыбы, позволяет с измерительных шкал штангенциркулей одновременно снять два промера: линейное расстояние по осевой линии от конца рыла до точки на теле рыбы – горизонтальный промер и линейное расстояние от этой точки до осевой линии, перпендикулярное к осевой линии – вертикальный промер тела.

Для воспроизведения исходной формы тела рыб, а также динамики формы тела по мере роста размеров тела рыбы в длину использованы измеренные в граммах значения массы тела Q и десять линейных промеров тела гольянов: l – промысловая длина тела, aO – длина рыла, lC – длина головы, aV – расстояние до брюшных плавников, отражает линейное расстояние от конца рыла до места на теле гольянов, где значение высоты тела H максимально, aA – расстояние до анального плавника, h – минимальная высота тела на хвостовом стебле, разность промеров ($aA - lC$) призвана отразить длину брюшного отдела, разность промеров ($l - aA$) призвана отразить длину хвостового стебля взамен традиционно измеряемому значению ($l - pA$) [5], B – максимальная толщина тела рыбы.

Все линейные промеры выражены в сантиметрах. В целях соблюдения однородности единиц измерения из всех значений массы тела рыб, измеренных в граммах, извлечен кубический корень [8, 9]. Кубический корень из массы любого физического тела есть сторона куба, наполненного дистиллированной водой, масса которого при 20 °С и нормальном атмосферном давлении равна массе этого тела. При этом условии длина стороны куба – отрезок прямой линии, является адекватной линейной характеристикой массы и объема любого физического тела [1]. В данной работе величина кубического корня из массы тела, измеренной в граммах, поименована как условная масса тела с размерностью сантиметр. Длина тела рыб поименована как признак X , все остальные – признаки Y . Используемые в работе соотношения (5), (6), (7), (8) являются производными геометрической прогрессии, свойства которой полностью соответствуют математическому описанию умножительного (геометрического) роста животных [10,11,12].

Длина тела отловленных в р. Утка самок гольяна колебалась от 2,5 до 8,6 см. Весь полученный ряд числовых значений длины тела самок был разделен на одиннадцать классов с размером 0,5 см каждый: 2,51-3,00; 3,01-3,50; ...; 7,51-8,00 см, после чего по значениям длины тела 246 самок были сформированы одиннадцать выборок самок численностью от 15 до 29 особей в разных выборках. Для каждой выборки самок были вычислены выборочные средние геометрические значения одиннадцати признаков по соотношению

$$\tilde{x}_{i,k} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (x_{i,k})} = \exp \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln x_{i,k}) \right], \quad (1)$$

где k – порядковый номер выборки.

Выборка самок ($n = 25$) с длиной тела от 3,01 до 3,50 см – *вторая по порядку* в ранжированном на размерные классы ряде значений длины тела рыб, выбрана для построения исходной модели формы тела самок гольяна из р. Утка – модели двухмерного изометрического виртуального облика (ДИВО) [1]. По каждому из десяти разноименных выборочных средних геометрических значений $\tilde{y}_{i,2}$, где i – порядковый номер признака Y , и значению $\tilde{x}_{i,2} = 3,2516$ см второй выборки ($\tilde{x}_{i,2}; \tilde{y}_{1,2}; \tilde{y}_{2,2}; \tilde{y}_{3,2}; \dots; \tilde{y}_{10,2}$) вычислены десять модельных отно-

шений: $\tilde{x}_{i,2}/\tilde{y}_{1,2}; \tilde{x}_{i,2}/\tilde{y}_{2,2}; \dots; \tilde{x}_{i,2}/\tilde{y}_{10,2}$. При помощи модельных отношений все измеренные $y_{i,k}$ и вычисленные $\tilde{y}'_{i,k}$ признаков Y самок переведены в масштаб модели ДИВО по соотношению

$$y_{i,k} \cdot (\tilde{x}_{i,2}/\tilde{y}'_{i,2}) = y'_{i,k}. \quad (2)$$

После перевода $y_{i,2}$ и $\tilde{y}'_{i,2}$ в масштаб модели все $\tilde{y}'_{i,2} = \tilde{x}_{i,2}$ и, следовательно, равны числовому значению исходной модели формы тела самок – $\tilde{F}'_{i,2}$, вычисленному по (1):

$\tilde{F}'_{i,2} = \sqrt[10]{\prod_{i=1}^{10} (\tilde{y}'_{i,2})} = \tilde{x}_{i,2}$. Порядок вычисления $F_{i,k}$ и $\tilde{F}'_{i,k}$ и построения точек $(x_{i,k}; F_{i,k})$ и $(\tilde{x}_{i,k}; \tilde{F}'_{i,k})$ на плоскости рисунка системы прямоугольных координат OX и OY' проиллюстрирован в работе [1].

Расчет значений параметра q геометрических прогрессий рядов $\tilde{x}_{i,k}, \tilde{y}'_{i,k}, \tilde{F}'_{i,k}$ проведен по соотношению

$$q_i = \sqrt[n]{\tilde{x}_{i,R_2}/\tilde{x}_{i,R_1}}, \quad (3)$$

где q_i – знаменатель соответствующей геометрической прогрессии; R_1 и R_2 – реперные точки [11, 12]. При $n = 10$ в соотношении (3): $q(\tilde{X}) = 1,062719$, $q(\tilde{Q}) = 1,068341$, $q(a\tilde{O}) = 1,072547$, $q(l\tilde{C}) = 1,057020$, $q(a\tilde{V}) = 1,060858$, $q(a\tilde{A}) = 1,063399$, $q(a\tilde{A} - l\tilde{C}) = 1,066596$, $q(l - a\tilde{A}) = 1,061799$, $q(\tilde{H}) = 1,075971$, $q(\tilde{h}) = 1,076098$, $q(\tilde{B}) = 1,074304$, $q(\tilde{F}) = 1,067674$. Заметим, что $q(\tilde{F})$ можно рассчитать и по соотношению

$$q(\tilde{F}) = \sqrt[10]{\prod_{i=1}^{10} (q_i)}, \quad (4)$$

где только что представленные q_i вычислены по (3). Полученные q_i призваны выполнить роль видовых констант при описании геометрическими прогрессиями рядов средних значений отдельных признаков Y и формы тела самок гольяна из p . Утка и других рек, где обитают особи этого вида рыб.

Теперь, после вычисления q_i , не составляет труда построить на плоскости рисунка системы прямоугольных координат OX и OY' любую из одиннадцати линий геометрических прогрессий, отражающих динамику средних значений $\tilde{y}'_{i,k}$ разных признаков Y или средних значений формы тела по средним значениям длины тела $\tilde{x}_{i,k}$ самок гольяна.

Присвоение разным q_i статуса видовых констант самым естественным образом привело к мысли о необходимости осуществить контроль за тем, как с этими значениями q_i описываются геометрическими прогрессиями ряды исходных данных. Что под этим подразумевается?

Действительно описывающей выборки $(x_{i,k}; y'_{i,k})$ самок гольяна принято считать такую геометрическую прогрессию $\tilde{y}'_{i,2}/\tilde{x}_{i,2}$, когда, после трансформации модельной выборки

$(x_{i,2}; y'_{i,2})$ по значениям видовых констант $q(\tilde{y}'_i)$ и $q(\tilde{x}_i)$ ее знаменателя $q(\tilde{y}'_i / \tilde{x}_i) = q(\tilde{y}'_i) / q(\tilde{x}_i)$ на место расположения $(x_{i,k}; y'_{i,k})$ других выборок исходных данных, оказываются незначимыми по величине разности $(\ln y'_{i,2} - \ln y'_{i,k})$ в парах $(x_{i,2}; y'_{i,2})$ и $(x_{i,k}; y'_{i,k})$, где $x_{i,2} = x_{i,k}$. При этом трансформация модельной выборки $(x_{i,2}; y'_{i,2})$ во всех случаях должна проводиться по единым правилам.

В общих чертах процедура трансформации модельной выборки $(x_{i,2}; y'_{i,2})$ выглядит таким образом. Вначале меньшее по величине $x_{1,2}$ пары $(x_{1,2}; y'_{1,2})$ модельной выборки трансформируется на аналогичное – меньшее по величине значение $x_{1,3}$ пары $(x_{1,3}; y'_{1,3})$ следующей по порядку выборки $(x_{i,3}; y'_{i,3})$. После этого в положение $x_{1,3}$ трансформируется сопряженное с $x_{1,2}$ значение $y'_{1,2}$. Затем в той же последовательности значение $x_{2,2}$ – второе по величине и сопряженное с ним $y'_{1,2}$ модельной выборки трансформируются на второе по величине $x_{2,3}$ выборки $(x_{i,3}; y'_{i,3})$ и так далее до $(x_{n,2}; y'_{i,2})$ на $x_{n,3}$.

Понятно, что трансформацию $(x_{i,2}; y'_{i,2})$ на ранжированные по величине $x_{i,k}$ разных выборок $(x_{i,k}; y'_{i,k})$ необходимо проводить на соответствующей математической основе. Пригодными для этой цели оказались математические выражения, производные от геометрической прогрессии.

Если $x_1 < x_2$, то при трансформации x_2 на x_1 первоначально вычисляется:

$$(n-1)_{\leftarrow} = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{\ln q(\tilde{x})}, \quad (5)$$

где $q(\tilde{x})$ – видовая константа, вычисленная по (3). Затем в положение на x_1 трансформируется y'_2 по геометрической прогрессии:

$$y'_2 / q(\tilde{y}'_i)^{(n-1)_{\leftarrow}} = \hat{y}'_2, \quad (6)$$

где $q(\tilde{y}'_i)$ – видовая константа i -го признака Y , а $(n-1)_{\leftarrow}$ вычислено по (5). Если $x_1 > x_2$, то при трансформации $(x_2; y'_2)$ на x_1 вычисляются:

$$(n-1)_{\rightarrow} = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{\ln q(\tilde{x})}. \quad (7)$$

$$y'_2 \cdot q(\tilde{y}'_i)^{(n-1)_{\rightarrow}} = \hat{y}'_2. \quad (8)$$

Необходимо заметить, что любая величина $(n - 1)$ – расстояние между x_1 и x_2 , которое выражено числом шагов n геометрической прогрессии, а не числом единиц метрической или иной системы измерения физических тел.

После трансформации $y'_{i,2}$ на x_i всякий раз возникает ситуация, при которой одному значению x_i соответствуют два значения y'_i : $y'_{i,k}$ и $\hat{y}'_{i,2}$. В итоге для выборки $x_{i,k}$ мы получаем возможность сформировать выборку разностей $(\ln \hat{y}'_{i,2} - \ln y'_{i,k})$, положительных или отрицательных по знаку, которые ранжируем по величине, после чего при $n \leq 25$ становится возможным оценить сходство или различие между совокупностями $y'_{i,k}$ и $\hat{y}'_{i,2}$ по парному критерию Вилкоксона [13].

Проиллюстрируем сказанное на примере результатов трансформации модельной выборки $(x_{i,2}; F_{i,2})$ по геометрическим прогрессиям, в которых в качестве знаменателей прогрессий использованы значения видовых констант $q(\tilde{x})$ и $q(\tilde{F})$ (см. выше). Результаты расчета сумм разностей $(\ln \hat{F}_{i,2} - \ln F_{i,k})$, с учетом их знака, полученные после трансформации значений формы тела $F_{i,2}$ самок модельной выборки на $x_{i,k}$ десяти разных выборок $(x_{i,k}; F_{i,k})$, сведены в табл. 1. Знак (+) в таблице означает, что значения $\hat{F}_{i,2}$ модельной выборки самок больше по величине сопряженных значений $F_{i,k}$. Знак (-) отражает обратную картину.

Таблица 1

Суммы рангов (+) и (-) парного критерия Вилкоксона в каждой из десяти выборок $F_{i,k}$ самок

Table 1

Rank-sum (+) end (-) paired test Wilcoxon in each of the ten samples $F_{i,k}$ females

Знак Σ рангов	Суммы рангов разностей $(\ln \hat{F}_{i,2} - \ln F_{i,k})$										$\Sigma(\Sigma)$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
+	160	165	192	75	76	77	100	140	151	182	1318
-	165	111	108	115	134	133	131	91	125	71	1184
n пар	25	23	24	19	20	20	21	21	22	22	217

Оценка различий между $\hat{F}_{i,2}$ и $F_{i,k}$ при помощи парного критерия Вилкоксона показала на полное их отсутствие во всех десяти парных сравнениях выборок. Полученные результаты позволяют считать соотношение (8) – геометрическую прогрессию $\tilde{F}_{i,2}$ с параметром $q(\tilde{F}) = 1,067674$ – исходной (первой) моделью динамики формы тела самок гольяна, обитающих в р. Утка, на всем протяжении размерного ряда длины тела рыб, при которой возможно визуальное определение пола особей.

Длина тела отловленных самцов гольяна, при которой визуально определялся пол особей, колебалась от 2,74 до 7,83 см. При разности значений длины тела 184 самцов в ранжированный на размерные классы ряд длины тела самок сформировано восемь выборок самцов численностью от девятнадцати до тридцати особей в разных выборках. Как и для самок, выборочные средние значения всех одиннадцати признаков вычислены по (1).

По десяти модельным отношениям $\tilde{x}_{i,2}/\tilde{y}_{i,2}$ признаков самок гольяна модельной выборки переведены в масштаб модели ДИВО самок по соотношению (2) все измеренные и выборочные средние значения десяти признаков Y самцов. Отдельные $F_{i,k}$ и выборочные средние $\tilde{F}_{i,k}$ значения формы тела самцов, как и самок, вычислены по (1). Расчет параметров q_i геометрических прогрессий динамики $\tilde{x}_{i,k}; \tilde{y}_{i,k}; \tilde{F}_{i,k}$ самцов проведен по (3). Получены $q(\tilde{x}) = 1,046429$, $q(\tilde{F}) = 1,050797$.

Сравнение значений параметра $q(\tilde{F}/\tilde{x}) = q(\tilde{F})/q(\tilde{x}) = 1,0047$ геометрической прогрессии $\tilde{F}_{i,2}/\tilde{x}_{i,2}$ – модели динамики формы тела по длине тела самок, и $q(\tilde{F}/\tilde{x}) = 1,0042$ геометрической прогрессии $\tilde{F}_{i,k}/\tilde{x}_{i,k}$ самцов гольяна показало, что эти два значения $q(\tilde{F}/\tilde{x})$ практически совпали по величине!

По значениям параметров $q(\tilde{x}) = 1,062719$ и $q(\tilde{F}) = 1,067674$ самок (см. константы) проведена трансформация $(x_{i,2}; F_{i,2})$ самок модельной выборки на место расположения всех $(x_{i,k}; F_{i,k})$ самцов разных выборок по соотношениям (5), (6), (7), (8). Результаты оценки итогов совмещения выборок по x_i помещены в табл. 2.

Таблица 2

**Суммы рангов (+) и (-) парного критерия Вилкоксона
в каждой из восьми выборок $F_{i,k}$ самцов**

Table 2

Rank-sum (+) and (-) paired test Wilcoxon in each of the eight samples $F_{i,k}$ males

Знак Σ рангов	Суммы рангов разностей ($\ln \hat{F}_{i,2} - \ln F_{i,k}$)								$\Sigma(\Sigma)$
	1	2	3	4	5	6	7	8	
+	160	100	149	163	73	67	103	115	930
-	165	90	176	162	137	143	160	116	1149
n пар	25	19	25	25	20	20	22	21	177

Видно, что во всех выборках самцов различия между сопряженными ($\ln \hat{F}_{i,2} - \ln F_{i,k}$) отсутствуют, как и в табл. 1. Это означает, что после двух трансформаций модельной выборки $(x_{i,2}; F_{i,2})$ самок на $x_{i,k}$ самок и $x_{i,k}$ самцов, по значениям $q(\tilde{x})$ и $q(\tilde{F})$ – параметрам модели динамики формы тела по длине тела самок, получен результат, согласно которому в р. Утка одинаковые по длине тела самки и самцы гольяна не отличаются между собой по форме тела. Таким образом, по мере роста рыб в длину форма тела самок и самцов изменялась в одном направлении практически однозначно. Подтверждает сказанное рис. 1, где на плоскости системы прямоугольных координат OX и OY' нанесены: линия 1 модели ДИВО самок модельной выборки и точки $(\tilde{x}_{i,k}; \tilde{F}_{i,k})$ разных выборок самок и самцов.

Таким образом, если использованная в данной работе совокупность пластических морфологических признаков действительно характеризует форму тела гольяна, то без каких-либо других суждений правомерно прийти к выводу о том, что у одинаковых по длине тела самок и самцов гольяна, обитающих в условиях р. Утка, близки по величине или идентичны интегральные значения формы тела.

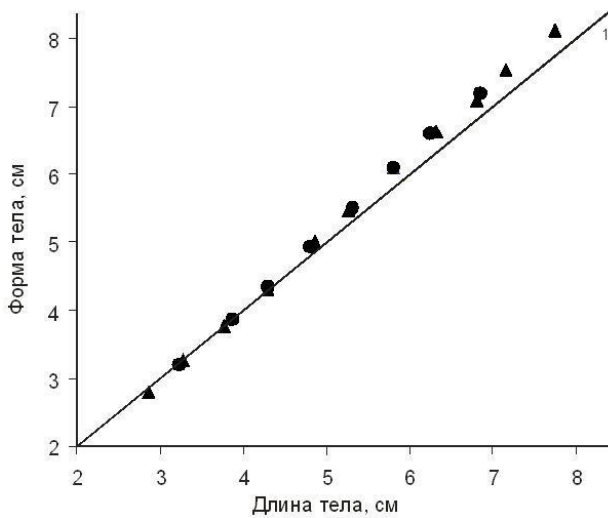


Рис. 1. Динамика формы тела по длине самок (▲) и самцов (●) гольяна из р. Утка
 Fig. 1. The dynamics of the body shape along the length of females (▲) and males (●) minnows from the River Canard

Геометрические средние значения формы тела самок и самцов в выборках представлены в масштабе значений признаков Y в исходной модели формы тела самок, 1 – линия модели ДИВО самок гольяна.

Серьезное сомнение в правильности такого толкования данных табл. 2 и рис. 1 – по видимому результату, возникло после проведения попарного сравнения выборочных совокупностей $(x_{i,k}; y'_{i,k})$ разных признаков Y самок и самцов. Напомним, что $y'_{i,k}$ – выборочное значение конкретного (i) признака Y в масштабе модели ДИВО. Символ (k) – порядковый номер выборки $(x_{i,k}; y'_{i,k})$. Так, после оценки различий тем же способом – совмещением по

$x_{i,k}$ разных выборок $(x_{i,k}; y'_{i,k})$ самок и самцов, отдельно по каждому из десяти признаков Y в выборках на интервале значений длины тела от 5,51 до 7,00 см, получен результат, согласно которому выявлены достоверные различия по шести пластическим признакам Y : aV, aA, H, h, (aA – IC), (1 – aA) (парный критерий Вилкоксона, 1%-й уровень значимости).

Так, естественно, возникла необходимость создать другую модель динамики формы тела, т.е. такую модель, при помощи которой, вероятно, станет возможно выявлять различия по форме тела у рыб разного пола при наличии достоверных различий по некоторым отдельным признакам. Решению этой задачи помогли результаты анализа нескольких вариантов динамики значений $(x_{i,k}; \tilde{F}'_{i,k})$ с разными сочетаниями признаков Y у самок и самцов в каждом варианте, из которых здесь рассмотрим два варианта.

На рис. 2, в масштабе модели ДИВО самок гольяна, представлена динамика выборочных средних значений признаков Q, aV, H, IC самок гольяна по выборочным средним значениям длины тела (признак X). Линия 1 модели ДИВО проведена через начало координат и точку $(\tilde{x}_{i,2}; \tilde{F}'_{i,2})$ модельной выборки самок. Видно, что по отношению к линии 1, где $q(\tilde{y}'_{i,k}) / q(\tilde{x}) = 1$, $q(\tilde{x}) = 1,062719$ (см. константы), линия 2 отражает динамику $\tilde{H}'_{i,k} / \tilde{x}_{i,k}$, и линия 3 – динамику $\tilde{Q}'_{i,k} / \tilde{x}_{i,k}$, расположены выше, в то время как линия 4 – динамики $\tilde{V}'_{i,k} / \tilde{x}_{i,k}$ и линия 5 – динамики $l\tilde{C}'_{i,k} / \tilde{x}_{i,k}$, расположены ниже линии 1. Вычисленное по (4) и значениям констант среднее геометрическое четырех $q(\tilde{y}'_{i,k})$ этих признаков равно

$$\sqrt[4]{\prod_{i=1}^4 q(\tilde{y}'_{i,k})} = q(\tilde{F}) = 1,065523, \text{ а поделенное на } q(\tilde{x}) \text{ равно } 1,00264. \text{ Значит, линия дина-}$$

мики формы тела $F_{i,k}^4$ по длине тела (на рис. 2 не проведена) расположена выше линии 1. Комбинация из четырех значений $q(\tilde{y}'_{i,k})$ признаков Q, aA, (1 - aA), IC самок приводит к величине $q(F^4) = 1,062632$, после деления которой на $q(\tilde{x})$ получаем величину $0,99992 = 1$. Очевидна возможность подбора и такой комбинации $q(\tilde{y}'_{i,k})$ признаков Y, для которых $q(F^n)/q(\tilde{x}) < 1$. Все сказанное свидетельствует о том, что окончательная величина $q(F^n)/q(\tilde{x})$ геометрической прогрессии динамики формы тела по длине тела самок или самцов в конечном итоге зависит от направления динамики $\tilde{y}'_{i,k}/\tilde{x}_{i,k}$ разных признаков Y по отношению к линии модели ДИВО. Но если отклонение частных линий динамики $\tilde{y}'_{i,k}/\tilde{x}_{i,k}$ и интегральной линии динамики $\tilde{F}_{i,k}/\tilde{x}_{i,k}$ от линии модели ДИВО – суть отражаемого на рисунке плоскости OX и OY' процесса динамики формы тела по длине тела, то представление разных по направленности линий динамики $\tilde{y}'_{i,k}/\tilde{x}_{i,k}$ признаков Y в величинах, соответствующих одному направлению их динамики по отношению к линии модели ДИВО, позволит исключить нивелирование величины интегральной оценки $q(F^n)/q(\tilde{x})$ разными по направленности линиями динамики $\tilde{y}'_{i,k}/\tilde{x}_{i,k}$.

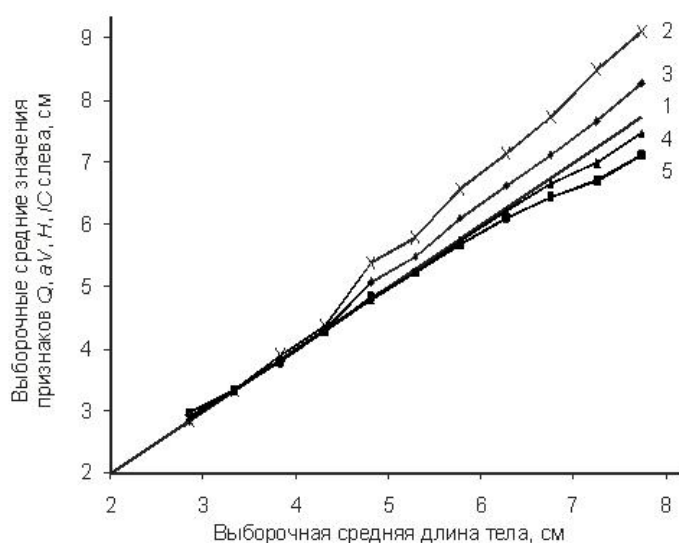


Рис. 2. Динамика выборочных геометрических средних значений признаков Y по длине самок гольяна:
 $(\tilde{l}_{i,k}; \tilde{H}'_{i,k})$ – линия 2; $(\tilde{l}_{i,k}; \tilde{Q}'_{i,k})$ – линия 3;
 $(\tilde{l}_{i,k}; a\tilde{V}'_{i,k})$ – линия 4; $(\tilde{l}_{i,k}; l\tilde{C}'_{i,k})$ – линия 5;
 1 – линия модели ДИВО самок гольяна
 Fig. 2. Dynamics of random geometric mean values of attributes Y along the length of female minnows $(\tilde{l}_{i,k}; \tilde{H}'_{i,k})$ – line 2;
 $(\tilde{l}_{i,k}; \tilde{Q}'_{i,k})$ – line 3; $(\tilde{l}_{i,k}; a\tilde{V}'_{i,k})$ – line 4;
 $(\tilde{l}_{i,k}; l\tilde{C}'_{i,k})$ – line 5;
 1 – line model DIVO female minnow

Поэтому для создания другой модели динамики формы тела по длине тела самок гольяна – второй модели, принято условие, согласно которому все $q(\tilde{y}'_{i,k})$ геометрических прогрессий динамики $\tilde{y}'_{i,k}$ признаков Y по величине должны быть больше $q(\tilde{x})$, т. е. все без исключения линии связи $\tilde{y}'_{i,k}/\tilde{x}_{i,k}$ на рисунке плоскости OX и OY' должны быть расположены выше линии модели ДИВО. Обратившись к видовым константам самок, видим, что $q(\tilde{y}'_{i,k})$ признаков IC, aV, (1 - aA) самок меньше значения $q(\tilde{x})$. Для выполнения принятого условия значения $q(\tilde{y}'_{i,k})$ этих признаков преобразуем по соотношению

$$q(\tilde{x})^2 / q(\tilde{y}'_{i,k}) = q(\tilde{y}''_{i,k}), \tag{9}$$

где $q(\tilde{y}''_{i,k}) > q(\tilde{x})$ во столько раз, во сколько $q(\tilde{y}'_{i,k}) < q(\tilde{x})$. Соответственно, для переноса точек $(x_{i,k}; y'_{i,k})$ и $(\tilde{x}_{i,k}; \tilde{y}'_{i,k})$ этих признаков на рисунке системы ОХ и ОУ' из нижнего положения в верхнее по отношению к линии модели ДИВО значения всех $y'_{i,k}$ и $\tilde{y}'_{i,k}$ преобразуем по соотношению

$$x_{i,k}^2 / y'_{i,k} = y''_{i,k}. \tag{10}$$

Наконец, по семи исходным $q(\tilde{y}'_{i,k})$ и трем преобразованным $q(\tilde{y}''_{i,k})$ вычислим по (4) знаменатель $q(\tilde{F}')$ геометрической прогрессии другой (второй) модели динамики формы тела самок гольяна: $q(\tilde{F}') = 1,069382$.

Теперь выпишем значения $q(\tilde{x})$, $q(\tilde{y}'_{i,k})$, $q(\tilde{F}')$ самцов гольяна, вычисленные по (3). Здесь величина $q(\tilde{x})$ вычислена по ряду чисел, состоящему из восьми выборочных средних $\tilde{x}_{i,k}$ самцов, а десять значений $q(\tilde{y}'_{i,k})$ вычислены по десяти рядам $\tilde{y}'_{i,k}$ самцов – после перевода в масштаб модели ДИВО самок измеренных значений $y_{i,k}$ и $\tilde{y}_{i,k}$ десяти признаков Y самцов по модельным отношениям $\tilde{x}_{i,2} / \tilde{y}_{i,2}$ самок модельной выборки. Как и для самок, в соотношении (3) $n = 10$: $q(\tilde{X}) = 1,046429$, $q(\tilde{Q}) = 1,051941$, $q(a\tilde{O}) = 1,053140$, $q(l\tilde{C}) = 1,041834$, $q(a\tilde{V}) = 1,041805$, $q(a\tilde{A}) = 1,044219$, $q(a\tilde{A} - l\tilde{C}) = 1,045539$, $q(l - a\tilde{A}) = 1,049957$, $q(\tilde{H}) = 1,061090$, $q(\tilde{h}) = 1,061710$, $q(\tilde{B}) = 1,056960$, $q(\tilde{F}') = 1,050797$. Видно, что числовые значения $q(\tilde{y}'_{i,k})$ признаков lC, aV, aA, (aA – lC) меньше $q(\tilde{x}_i)$. Поэтому все $y'_{i,k}$ и $\tilde{y}'_{i,k}$ этих признаков преобразуем по (10) в $y''_{i,k}$ и $\tilde{y}''_{i,k}$, после чего для каждой из восьми выборок самцов по соотношению (1) вычислим значения $F'_{i,k}$ и $\tilde{F}'_{i,k}$ по $y'_{i,k}$, $y''_{i,k}$, $\tilde{y}'_{i,k}$, $\tilde{y}''_{i,k}$. Точки $(\tilde{x}_{i,k}; \tilde{F}'_{i,k})$ второго варианта моделирования динамики формы тела по длине тела самок и самцов гольяна нанесем на плоскость рис. 3 системы координат ОХ и ОУ'. Теперь на участке длины тела рыб от пяти до семи сантиметров точки $(\tilde{x}_{i,k}; \tilde{F}'_{i,k})$ самцов расположены выше аналогичных точек самок.

Оценим информативность второй модели динамики формы тела по длине тела самок. Для этого проведем трансформацию значений $x_{i,2}$ и $F'_{i,2}$ точек $(x_{i,2}; F'_{i,2})$ исходной модельной выборки самок по (5), (6), (7), (8) на место расположения $x_{i,k}$ разных выборок самцов на оси ОХ рис. 3 по геометрическим прогрессиям с $q(\tilde{X}) = 1,062719$ – видовая константа и $q(\tilde{F}') = 1,069382$ – значение знаменателя прогрессии второй модели динамики формы тела самок гольяна. Результаты трансформации приведены в табл. 3.

Видно отчетливо, что $F'_{i,k}$ самцов в пятой, шестой, седьмой и восьмой выборках больше значений $\hat{F}'_{i,2}$ самок. В шестой и седьмой выборках различия достоверны на 1%-м уровне значимости. Для уточнения результатов, помещенных в табл. 3, отдельно выполнена оцен-

ка сходства или различия по форме тела самок и самцов в пятых и восьмых выборках. После трансформации выборочных $F'_{i,5}$ и $F'_{i,8}$ самок на $x_{i,5}$ и $x_{i,8}$ самцов тем же способом – по (5), (6), (7), (8), где $q(\tilde{X}) = 1,062719$, $q(\tilde{F}') = 1,069382$, и вычисления разностей $(\ln \hat{F}'_{i,5}$ самок – $\ln F'_{i,5}$ самцов) и $(\ln \hat{F}'_{i,8}$ самок – $\ln F'_{i,8}$ самцов) проявились достоверные различия между $\hat{F}'_{i,8}$ самок и $F'_{i,8}$ самцов.

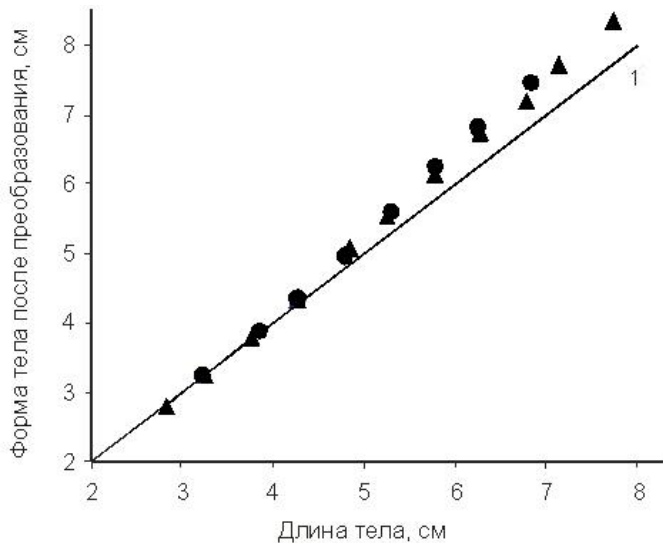


Рис. 3. Динамика преобразованных выборочных геометрических средних значений формы тела самок (▲) и самцов (●) гольяна из р. Утка: 1 – линия модели ДИВО самок гольяна
Fig. 3. The dynamics of the transformed sample geometric mean values of female body females (▲) and males (●) minnows from the River Canard: 1 – line model DIVO female minnow

Таблица 3

**Суммы рангов (+) и (-) парного критерия Вилкоксона
в каждой из восьми выборок $F_{i,k}$ самцов**

Table 3

Rank-sum (+) and (-) paired Wilcoxon test in each of the eight samples $F_{i,k}$ males

Знак Σ рангов	Суммы рангов разностей $(\ln \hat{F}_{i,2} - \ln F_{i,k})$								$\Sigma(\Sigma)$
	1	2	3	4	5	6	7	8	
+	109	103	191	143	70	25	42	66	749
-	216	87	134	182	140	185	207	165	1316
n пар	25	19	25	25	20	20	22	21	177

Таким образом, если всем рядам значений $y'_{i,k}$ признаков Y , призванным характеризовать форму тела рыб при разных $x_{i,k}$, придать одно направление динамики по отношению к линии модели ДИВО, в данном случае – положительное, то можно не только видеть на рис. 3, но и утверждать, что на интервале длины тела от 5,5 до 7,0 см и больше форма тела самцов изменяется иначе, чем изменяется форма тела самок. Это, в свою очередь, приводит к мысли о том, что на данном отрезке онтогенеза рыб разного пола – репродуктивном периоде жизни рыб – проявляются и реализуются два направления формообразования, приводящие, вероятно, к выравниванию гидродинамических характеристик тела самок и самцов: лобовое сопротивление, обтекаемость [14] – и, тем самым, к снижению энерги-

ческих затрат при обитании рыб в условиях направленного движения среды обитания – течения воды в русле реки.

Подведем краткий итог сказанному выше. Представлены десять соотношений, которые составляют математическую основу метода оценки половых различий самок и самцов популяции речного голяна. Логической основой метода является исходная виртуальная модель тела рыб (модель ДИВО) – фигура равностороннего многоугольника [1] – и представление о взаимосвязанном умножительном изменении линейных размеров всех пластических признаков в процессе геометрического роста размеров тела животных [10, 11, 12], которое описывается геометрической прогрессией.

Логическая и математическая основы позволили вслед за первой создать вторую модель динамики формы тела по длине тела самок голяна, при помощи которой стало возможным напрямую – способом трансформации модельной выборки $(x_{i,2}; F'_{i,2})$ самок – провести оценку сходства или различия по форме тела самок и самцов популяции особей речного голяна р. Утка.

Трансформация модельной выборки значений длины и формы тела самок голяна по размерному ряду длины тела с $q(\tilde{X}) = 1,062719$ и значению $q(\tilde{F}') = 1,069382$ геометрической прогрессии второй модели динамики формы тела по длине тела самок – методический прием, позволяющий оценивать не только сходство или различие по форме тела самок и самцов популяции р. Утка, но и самок из разных популяций относительно самок популяции р. Утка. Для этого из разных популяций особей вида достаточно отловить всего по одной выборке наиболее крупных половозрелых самок численностью 25-30 особей в выборке. Если возникнет необходимость сравнить форму тела самцов из разных популяций, то, как и в случае с самками, необходимо построить модель ДИВО по модельной выборке самцов из той же, что и самки, популяции и, аналогично – по материалам измерения самцов всех размеров тела, которые встречены при отлове, рассчитать параметры $q(\tilde{x})$, $q(\tilde{y}'_{i,k})$, $q(\tilde{F})$ геометрических прогрессий первой и второй моделей динамики формы тела по длине тела самцов.

В данной работе параметры исходной модели ДИВО и моделей динамики формы тела по длине тела самок голяна вычислены впервые. Поэтому за популяцией особей речного голяна из р. Утка на данном этапе исследования условно закрепляется статус исходной популяции вида, по значениям параметров моделей динамики формы тела самок и самцов которой должно проводиться сравнение формы тела самок и самцов всех других популяций этого вида рыб. Тем самым ряды измеренных значений линейных промеров одиннадцати пластических признаков модельных выборок самок и самцов голяна р. Утка, исходные модельные отношения признаков $\tilde{x}_{i,2}/\tilde{y}_{i,2}$, видовые константы $q(\tilde{x})$, $q(\tilde{y}'_{i,k})$, $q(\tilde{y}''_{i,k})$, $q(\tilde{F})$, $q(\tilde{F}')$ геометрических прогрессий первой и второй моделей динамики формы тела по длине тела самок и самцов могут быть использованы для создания исходного банка данных.

Список литературы

1. Беляев В.И., Русанов В.В. Отражение статики и динамики формы тела животных при помощи модели двухмерного изометрического виртуального облика (на примере рыб) // Вест. Тюм. гос. ун-та. – 2005. – № 5. – С. 202-212.
2. Смирнов В.С., Божко А.М., Рыжков Л.П., Добринская Л.А. Применение метода морфофизиологических индикаторов в экологии рыб. – Петрозаводск: Карелия, 1972. – 168 с.

3. Смирнов В.С., Божко А.М., Добринская Л.А. Основные требования к сбору и обработке материала по костистым рыбам при использовании метода морфофизиологических индикаторов // Типовые методики исследования продуктивности видов рыб в пределах их ареалов. – Вильнюс, 1974. – Ч. I. – С. 26-36.
4. Сукацкас В.Т. Биометрические проблемы исследования рыб (*Salmo*) в пределах ареала // Типовые методики исследования продуктивности видов рыб в пределах их ареалов. – Вильнюс, 1974. – Ч. I. – С. 13-21.
5. Шапошникова Г.Х., Дорофеева Е.А. Таблицы промеров рыб семейства *Salmonidae* // Типовые методики исследования продуктивности видов рыб в пределах их ареалов. – Вильнюс, 1974. – Ч. I. – С. 22-25.
6. Скрыбин А.Г. Сиговые рыбы юга Сибири. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1979. – 230 с.
7. Мина М.В., Клевезаль Г.А. Рост животных. – М.: Наука, 1976. – 292 с.
8. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1987. – 430 с.
9. Эренберг А. Анализ и интерпретация статистических данных. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 408 с.
10. Беляев В.И. Оценка роста и динамики формы тела животных с позиции закона геометрического роста. – Свердловск, 1985. – 54 с. – Деп. в ВИНТИ. 05.06.1985, № 4212 – 85 деп.
11. Беляев В.И. Оценка функциональных отношений биологических признаков животных в выборочных базах данных (на примере рыб) // Проблемы отдаленных эколого-генетических последствий радиационных инцидентов: Тоцкий ядерный взрыв. – Екатеринбург, 2000. – С. 88-98.
12. Беляев В.И. Принцип связи двух переменных в алгоритмах оценки функциональных отношений биологических признаков животных (на примере рыб) // Сиб. экол. журн. – 2001. – № 5. – С. 637-643.
13. Зайцев Г.Н. Математическая статистика в экспериментальной ботанике. – М.: Наука, 1984. – 424 с.
14. Александер Р. Биомеханика. – М.: Мир, 1970. – 340 с.

Сведения об авторе: Беляев Владимир Иванович, e-mail: belyaevug@rambler.ru.