
ПРОМЫШЛЕННОЕ РЫБОЛОВСТВО. АКУСТИКА

УДК 534.231.1

С.М. Балабаев, Н.Ф. Ивина

Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет,
690087, г. Владивосток, ул. Луговая, 52б

СИММЕТРИЧНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНОМ ВОЛНОВОДЕ ТИПА ПЛАСТИНЫ

Получено дисперсионное уравнение цилиндрических нормальных волн в анизотропном волноводе типа пластины. Рассчитаны дисперсионные зависимости безразмерного волнового числа (действительные, мнимые и комплексные моды) для симметричных нормальных волн в анизотропной пластине из пьезокерамики двух типов. Рассмотрено влияние анизотропии на дисперсионные соотношения. Показано, что учет этого влияния для материалов со значительной анизотропией приводит к существенным изменениям спектра волновых чисел.

Ключевые слова: нормальные волны, анизотропный волновод, дисперсионное уравнение.

S.M. Balabaev, N.F. Ivina

SYMMETRICAL CYLINDRICAL NORMAL WAVES IN ANISOTROPIC PLATE WAVEGUIDE

Dispersion equation of cylindrical normal waves in anisotropic plate waveguide is obtained. Dispersion dependences of undimensional wave number (real, imaginary, and complex modes) for symmetrical normal waves in anisotropic plate from two types piezoceramics are calculated. The influence of anisotropy on dispersion correlations is considered. It is shown that calculation of this influence for materials with considerable anisotropy leads to essential changes of spectrum of wave numbers.

Key words: normal waves, anisotropic waveguide, dispersion equation.

При построении точной теории пьезоэлектрических преобразователей произвольных размеров и решении ряда дифракционных задач, а также при неразрушающем контроле материалов и проектировании ультразвуковых линий задержки возникает необходимость предварительного вычисления полного набора корней дисперсионного уравнения нормальных волн волноводов различных типов, в частности, в виде пьезопластины, являющейся анизотропной по своим акустическим и электрическим характеристикам.

Нормальные волны в твердом изотропном волноводе типа пластины рассмотрены в классической монографии [1]. Волны в стержневом волноводе исследованы в статьях [2, 3]. Симметричные и антисимметричные цилиндрические нормальные волны в пьезопластине в изотропном приближении рассмотрены в работе авторов [4]. Целью данной статьи является изучение влияния анизотропии пьезокерамики на характеристики нормальных волн пьезопластины.

Рассмотрим в качестве волновода пьезопластину толщиной $2h$, в которой распространяются цилиндрические нормальные волны, вектор смещения которых имеет только радиальную и осевую компоненты $\vec{u}(u_r, u_z)$.

Учет упругой анизотропии (как будет показано ниже) не приводит к принципиальным изменениям характеристик нормальных волн, однако выделение продольной и поперечной составляющих в структуре нормальной волны уже неправомерно; поэтому задача решается относительно вектора смещения $\bar{u}(u_r, u_z)$.

Уравнения движения в цилиндрических координатах (r, φ, z) запишем в виде [5]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ – плотность, t – время, σ_{ik} – компоненты тензора напряжений.

Закон Гука для анизотропной пьезокерамики (симметрия ∞mm):

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} &= c_{12} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{11} \frac{u_r}{r} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{rr} = c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12} \frac{u_r}{r} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_{zz} &= c_{13} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{rz} = c_{55} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где c_{ik} – компоненты матрицы упругих постоянных пластины.

Временная зависимость предполагается гармонической $\exp(-i\omega t)$, ω – круговая частота.

Подставив выражения для компонент тензора напряжений (2) в уравнения движения (1), получим

$$\begin{aligned} c_{11} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + (c_{13} + c_{55}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + c_{55} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + k_l^2 u_r &= 0, \\ c_{55} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{55}) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + k_l^2 u_z &= 0, \\ k_l &= \omega / c_l, \quad k_t = \omega / c_t, \quad c_l^2 = c_{33} / \rho, \quad c_t^2 = c_{55} / \rho. \end{aligned} \quad (3)$$

В уравнениях (3) и далее упругие постоянные нормированы на c_{33} , т.е. являются безразмерными.

Учитывая осевую симметрию задачи, в качестве пробного решения системы уравнений (3) возьмем симметричную по толщине пластины цилиндрическую волну, распространяющуюся в радиальном направлении

$$\begin{aligned} u_z(r, z) &= A_1 J_0(k_1 r) \sin k_3 z, \\ u_r(r, z) &= A_2 J_1(k_1 r) \cos k_3 z, \end{aligned}$$

где $J_n(z)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка, A_i – произвольные постоянные.

Подстановка пробного решения в систему (3) дает линейную однородную систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_1, A_2

$$\begin{cases} a_{11}A_1 + a_{12}A_2 = 0, \\ a_{21}A_1 + a_{22}A_2 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$a_{11} = 1 - \frac{k_3^2}{k_l^2} - \frac{k_1^2}{k_t^2}, \quad a_{12} = -\frac{c_{13} + c_{55}}{k_l^2} k_1 k_3,$$

$$a_{21} = a_{12}, \quad a_{22} = 1 - c_{11} \frac{k_1^2}{k_l^2} - \frac{k_3^2}{k_t^2}.$$

Нетривиальное решение системы (4) должно удовлетворять условию $\det[a_{ik}] = 0$, которое сводится к уравнению Кристоффеля:

$$k_3^4 + pk_3^2 + q = 0,$$

$$p = k_l^2 \left(\frac{k_1^2}{k_t^2} - 1 \right) - k_t^2 + \frac{k_1^2 k_t^2}{k_l^2} (c_{11} - (c_{13} + c_{55})^2),$$

$$q = (k_t^2 - k_1^2)(k_l^2 - c_{11} k_1^2).$$

Корни уравнения Кристоффеля допускают предельный переход к случаю полной изотропии ($k_{31}^2 = k_t^2 - k_1^2, k_{32}^2 = k_t^2 - k_1^2$), поэтому соответствующие волны можно считать квазипродольной и квазипоперечной.

Структура волн полностью определена

$$u_{zi} = \alpha_{1i} J_0(k_1 r) \sin k_{3i} z, \quad u_{ri} = \alpha_{2i} J_1(k_1 r) \cos k_{3i} z,$$

где $\alpha_{1i} = A_{1i}, \alpha_{2i} = A_{2i}$ – алгебраические дополнения матрицы, взятые при соответствующих корнях k_{3i} . Общее решение рассматриваемой краевой задачи запишем в виде

$$\begin{aligned} u_z &= J_0(k_1 r) (B_1 \alpha_{11} \sin k_{31} z + B_2 \alpha_{12} \sin k_{32} z), \\ u_r &= J_1(k_1 r) (B_1 \alpha_{21} \cos k_{31} z + B_2 \alpha_{22} \cos k_{32} z). \end{aligned} \quad (5)$$

Для определения постоянных B_i используем следующие граничные условия: $\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0$, при $z = \pm h$.

Подстановка решения (5) в граничные условия дает систему линейных однородных алгебраических уравнений для определения постоянных B_i с матрицей коэффициентов b_{ik}

$$\begin{aligned} b_{11} &= (\alpha_{11} k_{31} + c_{13} k_1 \alpha_{21}) \cos k_{31} h, & b_{12} &= (\alpha_{12} k_{32} + c_{13} k_1 \alpha_{22}) \cos k_{32} h, \\ b_{21} &= (\alpha_{11} k_1 + \alpha_{21} k_{31}) \sin k_{31} h, & b_{22} &= (\alpha_{12} k_1 + \alpha_{22} k_{32}) \sin k_{32} h. \end{aligned}$$

Нетривиальное решение системы должно удовлетворять условию $\det[b_{ik}] = 0$, которое дает дисперсионное уравнение симметричных нормальных волн для анизотропного волновода. Дисперсионное уравнение определяет возможный спектр волновых чисел как функций частотного параметра, а также физических и геометрических параметров волновода.

Дисперсионные уравнения даже в простейшем случае изотропной пластины [4] требуют довольно громоздких численных расчетов, поэтому желательно найти наиболее простые точки дисперсионных кривых, либо асимптоты, позволяющие ориентироваться в поведении всего семейства.

В полном наборе нормальных волн обычно выделяют нулевую нормальную волну, для которой волновое число действительно на всех частотах. Для всех остальных нормальных волн волновое число действительно только на частотах выше некоторых критических значений, определяемых либо условием $k_1 = 0$, либо равенством нулю групповой скорости.

Численные результаты расчетов полного спектра нормальных волн для анизотропного волновода выполнены для пластин из двух типов пьезокерамики: ЦТС (цирконат титанат свинца, $c_{55} = 0,2$) и BaCaTiO₃ (титанат бария, $c_{55} = 0,3$). Параметры пьезокерамики соответствуют справочным данным [6]. Учет упругой анизотропии не приводит к изменению критических частот, определяемых из условия $k_1 = 0$.

Для организации численных расчетов спектра волновых чисел и для определения их асимптотики важно определить низкочастотные пределы дисперсионных кривых, т.е. точки выхода дисперсионных кривых на плоскости комплексного переменного при $k_t = 0$. За начальное приближение точек выхода дисперсионных кривых брались точки выхода для изотропного волновода [4].

Спектр безразмерных волновых чисел рассчитывался по трем отдельным программам: комплексные моды; действительные моды; мнимые моды. Для уточнения действительных и мнимых корней использовалась библиотечная программа MREGF – вычисление действительного корня трансцендентного уравнения внутри интервала модифицированным методом Regula falsi. Для уточнения комплексных корней применялась программа STEM1 – вычисление заданного числа комплексных корней трансцендентного уравнения методом Мюллера.

На рис. 1 и 2 представлены дисперсионные кривые: частотные зависимости безразмерного волнового числа $k_1 h$ симметричных нормальных волн от частоты (безразмерного частотного параметра $k_t h$). Действительные и чисто мнимые ветви дисперсионных кривых изображены сплошной линией, а комплексные – штриховой.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Учет анизотропии для действительных ветвей приводит к увеличению фазовой скорости нормальных волн. Аналогичная закономерность для стержневого волновода отмечена ранее в работах [2, 3].

2. Для пьезокерамики со слабой анизотропией (например, титанат бария) учет анизотропии для комплексных ветвей не приводит к существенным качественным изменениям. Аналогичный результат получен в статье [7] для антисимметричных колебаний пьезоэлектрической плиты.

3. Для пьезокерамики со значительной анизотропией (например, ЦТС) отличия от изотропного варианта [4] в области мнимых значений волновых чисел весьма существенны. Сильная анизотропия приводит к значительному сдвигу точек выхода диспер-

сионных кривых на плоскости комплексного переменного. Более того, часть мод зарождается с чисто мнимыми значениями постоянной распространения и, минуя область комплексных значений постоянной распространения, переходит в область действительных значений постоянной распространения на критических частотах.

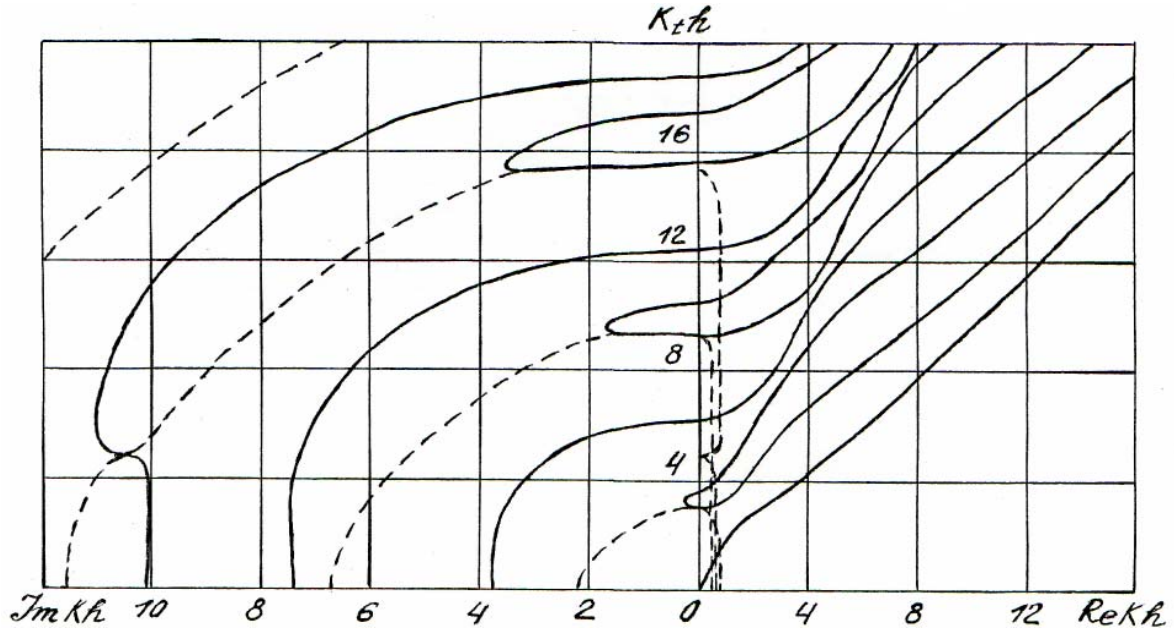


Рис. 1. Дисперсионные кривые безразмерного волнового числа симметричных нормальных волн для анизотропного волновода, $c_{55} = 0,2$
 Fig. 1. Dispersion curves of undimensional wave number of symmetrical normal waves for anisotropic waveguide, $c_{55} = 0,2$

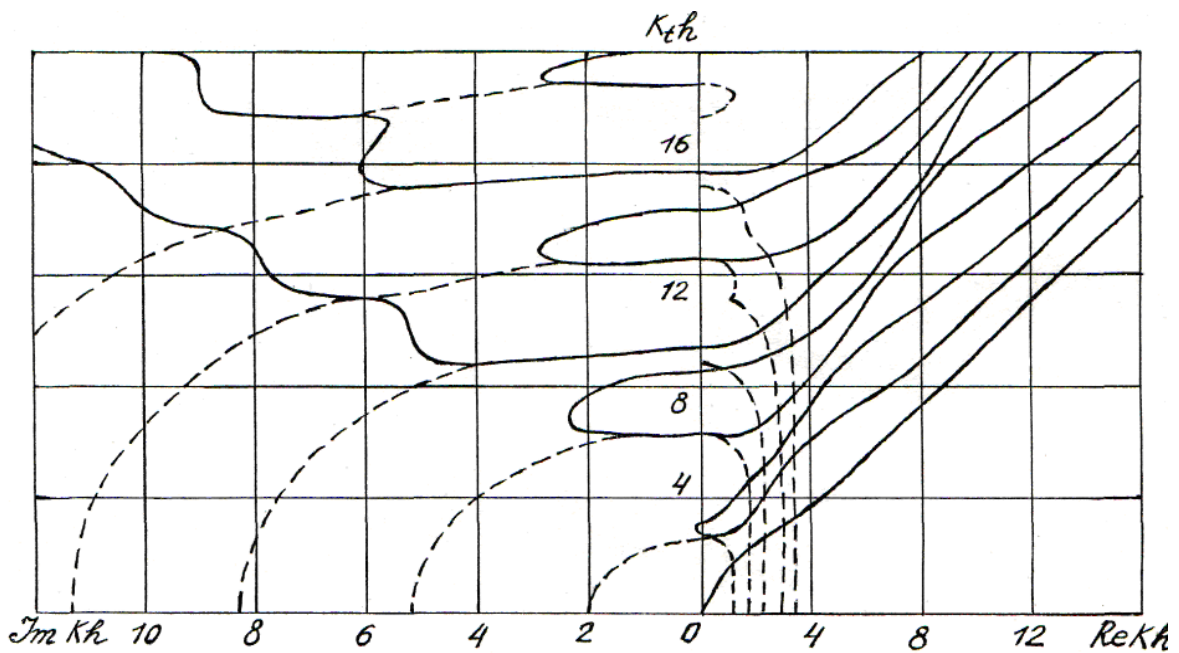


Рис. 2. Дисперсионные кривые безразмерного волнового числа симметричных нормальных волн для анизотропного волновода, $c_{55} = 0,3$
 Fig. 2. Dispersion curves of undimensional wave number of symmetrical normal waves for anisotropic waveguide, $c_{55} = 0,3$

Список литературы

1. Физическая акустика / под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – Ч. А. – 592 с.
2. Ивина Н.Ф., Нормальные волны в анизотропном пьезоактивном волноводе [Текст] / Н.Ф. Ивина, Б.А. Касаткин // Дефектоскопия. – 1975. – № 4. – С. 27-32.
3. Ивина Н.Ф. Численный анализ дисперсионных соотношений для нормальных волн пьезоактивного волновода [Текст] / Н.Ф. Ивина, Б.А. Касаткин // Акустический журнал. – 1982. – Т. 28, № 4. – С. 516-520.
4. Балабаев С.М. Симметричные и антисимметричные цилиндрические нормальные волны в волноводе типа пластины [Текст] / С.М. Балабаев, Н.Ф. Ивина // Научные труды Дальрыбвтуза. – Владивосток: Дальрыбвтуз, 2010. – Вып. 22. – Ч. 1. – С. 112-116.
5. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости [Текст] / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965. – 203 с.
6. Пьезокерамические преобразователи / под ред. С.И. Пугачева. – Л.: Судостроение, 1984. – 256 с.
7. Мадорский В.В. Построение системы однородных решений и анализ корней дисперсионного уравнения антисимметричных колебаний пьезоэлектрической плиты [Текст] / В.В. Мадорский, Ю.А. Устинов // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1976. – № 6. – С. 138-145.

Сведения об авторах: Балабаев Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор;

Ивина Наталья Федоровна, доктор технических наук, профессор.